حمل الآن



المراجعة رقم (1)

اختبار شهر مارس



اختبار ١

الدرجة
١٥

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① $\int$ ٥ ءس = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ س + ث (جـ) ٥ س (د) ٥ + س

② ن|ن + |ن = |.............

(أ) ن (ب) ن + ٢ (جـ) ن + ١ (د) ن − ١

③ $\int$ (س + ٢) (س − ٢) ءس = ...

(أ) س + ٤ + ث (ب) $\frac{1}{3}$ س^{3} − ٤ س + ث

(جـ) س^{3} − ٤ س + ث (د) (س^{2} − ٤)^{2} + ث

④ إذا كان : ^{ن}ل$_{ن-٣}$ = ٢٠ ، ^{م}ق$_{ن}$ = ^{م}ق$_{٢ن+١}$ فإن : م × ن = ...

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٢٠

⑤ إذا كان : |٧ = ^{٧}ل$_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ أ، ٧ (ب) ٧ (جـ) ١ أ، صفر (د) ٥٠٤٠

⑥ $\int$ $\frac{س^{3} - ٨}{س - ٢}$ ءس = ... + ث

(أ) س^{2} + ٢ س + ٤ (ب) $\frac{1}{3}$ س^{3} + س^{2} + ٤ س

(جـ) س^{3} + س^{2} + ٤ س (د) ٢ س + ٢

⑦ عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و٤ مشروبات هى ....

(أ) ٢٠ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ١

⑧ $\int$ س^{٥} $\left(١ + \frac{٣}{س}\right)^{٥}$ ءس = ... + ث

(أ) (س + ٣)^{٥} (ب) $\frac{1}{6}$ (س + ٣)^{٦}

(جـ) $\frac{1}{18}$ (س + ٣)^{٦} (د) ٥ (س + ٣)^{٤}

⑨ $\int \sqrt[3]{9س - 1}\ ءس = \dots\dots$

(أ) $\sqrt[3]{(9س - 1)^4} + ث$ (ب) $\frac{1}{12} \sqrt[3]{(9س - 1)^4} + ث$

(جـ) $\sqrt[4]{(9س - 1)^3} + ث$ (د) $\frac{1}{12} \sqrt[4]{(9س - 1)^3} + ث$

⑩ $\int \frac{س^7 - 5س^5 + س^3}{س^3}\ ءس = \dots\dots + ث$

(أ) $س^5 - 5س^3 + س$ (ب) $س^4 - 5س^2 + 1$

(جـ) $4س^3 - 10س$ (د) $\frac{1}{5}س^5 - \frac{5}{3}س^3 + س$

⑪ إذا كان : $(ن^2 + 9ن + 20) = \frac{|ن + 5}{س}$ فإن : $س = \dots\dots$

(أ) $ن + 3$ (ب) $|ن + 3$ (جـ) $ن + 4$ (د) $^{ن+5}ل_2$

⑫ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على ٤ مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) $4 + 4$ (ب) 4×4

(جـ) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ (د) 1

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① كم عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧}
ويكون أصغر من ٥٠٠ ؟ ($1\frac{1}{2}$ درجة)

② أوجد : (أ) $\int 7(2س - 7)^6\ ءس$

(ب) $\int \frac{15}{(3س - 5)^6}\ ءس$ ($1\frac{1}{2}$ درجة)

الدرجة
١٥

اختبار ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① ∫ (سـ² − ٣) ءسـ = ...

(أ) ٢ سـ
(ب) سـ³ − ٣ سـ + ث
(جـ) $\frac{١}{٣}$ سـ³ − ٣ سـ + ث
(د) ٢ سـ − ٣ + ث

② كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {١ ، ٣ ، ٦ ، ٧} ؟

(أ) ٩
(ب) ١٢
(جـ) ٦٤
(د) ٢٤

③ إذا كان : ∫ (٢ سـ − ٧)⁻³ ءسـ = أ (٢ سـ − ٧)⁻² + ث فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$
(ب) − $\frac{١}{٢}$
(جـ) $\frac{-١}{٤}$
(د) $\frac{١}{٤}$

④ إذا كان : $\frac{سـ}{\lfloor ٥}$ + $\frac{سـ}{\lfloor ٦}$ = $\frac{١}{\lfloor ٧}$ فإن : سـ = ...

(أ) $\frac{١}{٣٠}$
(ب) $\frac{١}{٦}$
(جـ) $\frac{١}{٧}$
(د) $\frac{١}{٤٩}$

⑤ إذا كان : $\frac{\lfloor ٢ن \quad \lfloor ن − ١}{\lfloor ٢ن − ١ \quad \lfloor ن + ١}$ = $\frac{١}{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣
(ب) ٥
(جـ) ٧
(د) ٩

⑥ ∫ $\frac{سـ² + ٣ سـ}{سـ}$ ءسـ = ...

(أ) سـ + ٣
(ب) $\frac{١}{٢}$ سـ² + ٣ سـ + ث
(جـ) سـ² + ٣ سـ + ث
(د) $\frac{سـ³ + ٣ سـ²}{سـ²}$

⑦ مجموعة حل المعادلة : $\frac{\lfloor سـ}{١٠}$ = سـ − ١ ل سـ − ٣ هى ....

(أ) {٥}
(ب) {٦}
(جـ) {٧}
(د) {٨}

⑧ ∫ $\frac{سـ³ + ٢٧}{سـ + ٣}$ ءسـ = ... + ث

(أ) سـ² − ٣ سـ + ٩
(ب) $\frac{١}{٣}$ سـ³ − $\frac{٣}{٢}$ سـ² + ٩ سـ
(جـ) سـ³ − ٣ سـ² + ٩ سـ
(د) $\frac{١}{٣}$ سـ³ − $\frac{٣}{٢}$ سـ²

⑨ $\int (2\text{س} - 5)^{6} \, \text{ءس} = \cdots\cdots\cdots + \text{ث}$

(أ) $(\text{س}^{2} - 5\text{س})^{6}$ (ب) $\frac{1}{14}(2\text{س} - 5)^{7}$

(جـ) $\frac{1}{14}(\text{س}^{2} - 5\text{س})^{7}$ (د) $\frac{1}{2}(2\text{س} - 5)^{7}$

⑩ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{1}{2}$ |ن ، |ن − ٢ ، |٢ − ن من السنتيمترات

فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^{2}

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

⑪ إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{10} = {^{\text{ن}}\text{ق}_{9}}$ فإن : ن ....

(أ) > 19 (ب) $= 19$ (جـ) < 19 (د) $= 11$

⑫ $\int \left[(\text{س}) \sqrt{\frac{2}{\text{س}^{2}} - \frac{3}{\text{س}}} \right] \text{ءس} = \cdots\cdots\cdots + \text{ث}$

(أ) $\frac{-3}{2\sqrt{2 - 3\text{س}}}$ (ب) $\frac{-2}{9}(2 - 3\text{س})^{\frac{3}{2}}$

(جـ) $\frac{2}{3}(2 - 3\text{س})^{\frac{3}{2}}$ (د) $\sqrt{2\text{س} - \frac{3}{2}\text{س}^{2}}$

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ؟ ($1\frac{1}{2}$ درجة)

② أوجد : (أ) $\int \frac{\text{س}^{2} - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2} \, \text{ءس}$

(ب) $\int \frac{7}{\sqrt{3\text{س} - 4}} \, \text{ءس}$ ($1\frac{1}{2}$ درجة)



كيفية طباعة صفحات معينة من ملف معين

مثلا ازاى نطبع الصفحات من صفحة 4 الى صفحة 9



خطوة 1

خطوة 2
اختيار اسم الطابعة بتاعتك

خطوة 3
كتابة الصفحات المراد طباعتها
نكتب رقم 4 ثم نكتب الشرطة دي - ثم نكتب 9

خطوة 4
اختيار نوع الورق

خطوة 5
اختيار A4

خطوة 6

حمل الآن

مجانا وحصريا

المراجعة رقم (2)

اختبار شهر مارس





الدرس الثالث: المتسلسلات الحسابية

ملخص الدرس:

ـ مجموع ن حدا الاولى من متتابعة حسابية:

لأي متتابعة حسابية (أ ، أ + د ، أ + ٢ د ،..........................، ل) ومكونة من ن حدا فإن مجموع حدودها يعطى بالعلاقة :

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)   أو $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (٢ أ + (ن – ١) د)   حيث:

أ الحد الاول ، ل الحد الاخير ، ن عدد الحدود ، د اساس المتتابعة الحسابية

ـ التعبير عن مجموع حدود متسلسلة حسابية باستخدام رمز التجميع $\sum$:

إذا كانت ($ع_ن$) متتابعة حسابية فإنه يمكن التعبير عن مجموع ن حدا الاولى منها باستخدام رمز التجميع

كما يلي : $جـ_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ع_ن$

أمثلة محلولة

مثال (١) :

أوجد مجموع الأعداد الطبيعية الفردية الاقل من ١٠٠ .

الحل :

الاعداد الطبيعية الفردية الاقل من ١٠٠ هي (١ ، ٣، ٥ ،..........، ٩٩) وهي تمثل متتابعة حسابية حدها الاول أ = ١ ، وحدها الاخير ل = ٩٩ ، واساسها د = ٢ وبفرض أن عدد حدودها ن

فإن ل = أ + (ن – ١) د ← ٩٩ = ١ + (ن – ١) × ٢ ∴ ن = ٥٠

∴ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) = $\frac{٥٠}{٢}$ (١ + ٩٩) = ٢٥٠٠



تدريب (١):

أوجد مجموع الأعداد الزوجية الطبيعية الأقل من ١٠٠

مثال (٢) :

في المتتابعة الحسابية (٩ ، ١٢ ، ١٥ ،.........................) أوجد:

١) مجموع العشرة حدود الاولى منها.

٢) مجموع عشرة حدود منها ابتداءً من الحد الحادى عشر.

٣) عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداءً من الحد الاول ليكون المجموع مساوياً ٧٥٠.

الحل :

١) مجموع العشرة حدود الاولى منها.

المتتتابعة حسابية : ﺃ = ٩ ، اساسها ء = ٣ ، ن = ١٠

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} \left(٢ﺃ + (ن - ١) ء \right) = \frac{١٠}{٢} \left(٢ \times ٩ + (١٠ - ١) \times ٣ \right) = ٢٢٥$$

٢) مجموع عشرة حدود منها ابتداءً من الحد الحادى عشر.

$$ع_{١١} = ﺃ + ١٠ء = ٩ + ١٠ \times ٣ = ٣٩$$

$$جـ_{ن} = \frac{١٠}{٢} \left(٢ \times ٣٩ + (١٠ - ١) \times ٣ \right) = ٥٢٥$$

٣) عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداءً من الحد الاول ليكون المجموع مساوياً ٧٥٠.

نفرض أن عدد الحدود المطلوب هو ن فيكون

$$٧٥٠ = \frac{ن}{٢} \left(٢ \times ٩ + (ن - ١) \times ٣ \right) \leftarrow ١٥٠٠ = ١٨ن + ٣ن(ن - ١)$$

$$٣ن^{٢} + ١٥ن - ١٥٠٠ = ٠ \leftarrow ن = ٢٠$$ **(مقبول) أو ن = -٢٥ مرفوض**

∴ ن (عدد الحدود) = ٢٠ حدا



تدريب (٢):

في المتتابعة الحسابية (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ....) أوجد:

١) مجموع العشرة حدود الاولى منها.

٢) مجموع العشرة حدود الثانية منها.

٣) عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداءً من الحد الاول ليكون المجموع مساوياً ٩٥٠.

مثال (٣) :

أوجد ١) $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٣ ر - ١)$

٢) $\sum_{ر=٥}^{٢٠} (٣ ر - ١)$

الحل :

١) $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٣ ر - ١)$ = مجموع متتابعة حسابية حدها الاول = ٢ ، حدها الأخير= ٥٩ ، وعدد حدودها = ٢٠

$\therefore \sum_{ر=١} (٣ ر - ١) = \frac{٢٠}{٢} (٢ + ٥٩) = ٦١٠$

٢) $\sum_{ر=٥}^{٢٠} (٣ ر - ١)$ = مجموع متتابعة حسابية حدها الاول = ١٤ ، حدها الأخير= ٥٩ ، وعدد حدودها = ١٦

$\therefore \sum_{ر=٥} (٣ ر - ١) = \frac{١٦}{٢} (١٤ + ٥٩) = ٥٨٤$



تدريب (٣):

أوجد ١) $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٢ر + ٧)$

٢) $\sum_{ر=٥}^{٢٠} (٢ر + ٧)$

حلول التدريبات:

حل تدريب (١) ٢٤٥٠

حل تدريب (٢):

١) ٢٧٥ ٢) ٧٧٥ ٣) ١٩

حل تدريب (٣):

١) ٥٦٠ ٢) ٥١٢



تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان: $\sum_{ر = ١}^{ن}$ (٤ – ٣ ر) = – ٣٩١ فإن: ن = ...

Ⓐ ١٧

Ⓑ ١٨

Ⓒ ١٩

Ⓓ ٢٠



٢) **مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ....، (٢ ن – ١)) يساوي**

Ⓐ $ن^{٢}$

Ⓑ ن (ن + ١)

Ⓒ ن (ن – ١)

Ⓓ ٢ $ن^{٢}$

٣) **مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١ ، ٧، ١٣ ، ....، ٦٧) يساوي........**

Ⓐ ٤٢٠

Ⓑ ٤١٤

Ⓒ ٤٠٨

Ⓓ ٤٠٢



٤) إذا كان مجموع ن حدا الاولى من متتابعة حسابية يعطى بالقانون جـ ن = ٢ ن (٧ – ن) فإن

ع٧ =........

أ) صفر

ب) ١٢

ج) -١٤

د) -١٢

٥) إذا كان مجموع ن حدا الاولى من متتابعة حسابية يعطى بالقانون جـ ن = ٢ ن (٧ – ن) فإن

عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع مساويا – ٢٤٠ هو........

أ) ١٢

ب) ١٣

ج) ١٤

د) ١٥

اجابة تمارين الدرس الثالث

١) أ ٢) أ ٣) ج ٤) د ٥) د



الدرس الرابع: المتتابعة الهندسية

ملخص الدرس:

ـ المتتابعة الهندسية :

المتتابعة (ع ~ن~) حيث ع ~ن~ ≠ ٠ تسمى متتابعة هندسية إذا كان: $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = مقدار ثابت (لكل ن ∈ ص^+^)

ويسمى هذا المقدر الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز ر .

ـ الصورة العامة للمتتابعة الهندسية والحد العام لها :

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هي (ٲ ، ٲ ر ، ٲ ر^{٢} ،.........................) وحدها العام هو ع ~ن~

حيث ع ~ن~ = ٲ ر$^{ن-١}$ حيث ن رتبة الحد

ـ الوسط الهندسي لعددين :

إذا كانت س ، ص ، ع ثلاث حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن :

١) ص يسمى وسطا هندسا بين س ، ع

٢) ص^{٢} = س × ع أو ص = ± $\sqrt{س ع}$

ـ العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي لعددين :

لأي عددين موجبين س ، ص فإن وسطهما الحسابي = $\frac{س + ص}{٢}$ ، وسطهما الهندسي = ± $\sqrt{س ص}$

ويكون الوسط الحسابي لعددين حقيقين أكبر من أو يساوي وسطهما الهندسي



أمثلة محلولة

مثال (١) :

ايا من المتتابعات التالية تمثل متتابعة هندسية

١) (١ ، ٢ ، ٤ ،٨ ، ....)

٢) ($\sqrt{٢}$ ، ٢ ، $\sqrt{٨}$ ، ٤ ، ....)

٣) (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....)

الحل :

١) (١ ، ٢ ، ٤ ،٨ ،...............) تمثل متتابعة هندسية لان $٢ \div ١ = ٤ \div ٢ = ٨ \div ٤ = ٢$ (مقدار ثابت)

٢) ($\sqrt{٢}$ ، ٢ ، $\sqrt{٨}$ ، ٤ ، .....) تمثل متتابعة هندسية لان $٢ \div \sqrt{٢} = \sqrt{٨} \div ٢ = ٤ \div \sqrt{٨} = \sqrt{٢}$ (مقدار ثابت)

٣) (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....) لا تمثل متتابعة هندسية لأن $٤ \div ١ \neq ٩ \div ٤$

تدريب (١): ايا من المتتابعات التالية تمثل متتابعة هندسية:

١) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ....)

٢) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ....)

مثال (٢) :

في المتتابعة الهندسية (٥ ، ٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ....) أوجد الحد الحادي عشر

الحل :

$أ = ٥$ ، $ر = ٢٥ \div ٥ = ٥$ ، $ن = ١١$

$ح_{١١} = أ\, ر^{١٠} = ٥ \times ٥^{١٠} = ٥^{١١}$



تدريب (٢): في المتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١، ....) أوجد الحد الثامن

مثال (٣) :

أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الثالث = ١٢ ، وحدها الثامن = ٣٨٤

الحل :

نفرض أن المتتابعة الهندسية هي (٢ ، ٢ ر ، ٢ ر٢ ، ....)

∴ $ع_٣ = ٢ ر^٢ = ١٢$ ← ①

، $ع_٨ = ٢ ر^٧ = ٣٨٤$ ← ②

بقسم ② ÷ ① ← $ر^٥ = ٣٢$ ← ر = ٢

بالتعويض في ① ← ٢ × ٤ = ١٢ ← ٢ = ٣

∴ المتتابعة الهندسية هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

تدريب (٣):

أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = ٣ ، وحدها الرابع = ٢٤

مثال (٤) :

اوجد العددين اللذين وسطهما الحسابي ٥ ، ووسطهما الهندسي ٣

الحل :

نفرض أن العددين هما س ، ص

∴ س + ص = ١٠ ← ①

، س ص = ٩ ← ②

من ① س = ١٠ - ص ← ③

بالتعويض من ③ في ②

(١٠ – ص) ص = ٩ ∴ ١٠ ص – $ص^٢$ = ٩ ← $ص^٢$ - ١٠ ص + ٩ = ٠

∴ ص = ١ أو ص = ٩

← س = ٩ أو س = ١

∴ العددان هما ١ ، ٩



تدريب (٤):

اوجد العددين اللذين وسطهما الحسابي ١٣ ، ووسطهما الهندسي ٥

حلول التدريبات

حل تدريب (١)

١) لا تمثل متتابعة هندسية   ٢) تمثل متتابعة هندسية

حل تدريب (٢):

$ع_٨ = \frac{١}{١٦}$

حل تدريب (٣):

(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ،......................)

حل تدريب (٤):

العددان هما : ١ ، ٢٥



تمارين على الدرس الرابع

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) المتتابعة الهندسية فيما يلي هي ....

أ) (١ ، ٤ ، ٨ ، ١٦،.....................)

ب) (٠ ، ١ ، ٢ ، ٤، ....)

ج) (لو س ، لو س٢ ، لو س٣ ، لو س٤ ،...............) حيث س ∋ ح+

د) ((لو س) ، (لو س)٢ ، (لو س)٣ ،(لو س)٤ ،...............) حيث س ∋ ح+

٢) متتابعة هندسية حدها الخامس= ٤٨ وحدها السادس= -٩٦ فإن المتتابعة هي ....

أ) (٣، ـ ٦ ، ١٢ ، ـ٢٤،.....................)

ب) (ـ ٣، ٦ ، ـ ١٢ ، ٢٤،.....................)

ج) (ـ ٣، ـ ٦ ، ـ ١٢ ، ـ ٢٤،.....................)

د) (٣، ٦ ، ١٢ ، ٢٤،.....................)

٣) عدد حدود المتتابعة (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢١٦ ، ١٢٨،..............................، ١)

أ) ١٢

ب) ١١

ج) ١٠

د) ٩



٤) إذا كان س ، ص ، ع ثلاث أعداد حقيقية موجبة تكون متتابعة هندسية فإن: ....

ⓐ ٢ ص = س + ع

ⓑ ص^٢ > س + ع

ⓒ ٢ص > $\sqrt{\text{س ع}}$

ⓓ س+ ع > ٢ ص

٥) إذا ادخلت ٦ أوساط هندسية بين $\frac{1}{2}$ ، ٦٤ فإن الوسط الرابع =..................

ⓐ ٤

ⓑ ٨

ⓒ ١٢

ⓓ ١٦

اجابة تمارين الدرس الرابع

١) د   ٢) أ   ٣) ب   ٤) د   ٥) ج



الدرس الخامس : المتسلسلات الهندسية

ملخص الدرس:

ـ مجموع ن حدا الاولى من متتابعة هندسية :

إذا كانت (أ ، أ ر ، أ ر^{٢}، أ ر^{٣} ،........، أ ر$^{ن-١}$) متتابعة هندسية فإن : مجموع ن حدا الاولى منها

يعطى بالقانون: $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ أو $جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$: ر ≠ ١

حيث أ الحد الأول ، ر اساس المتتابعة ، ن عدد الحدود ، ل الحد الاخير

ـ مجموع عدد لا نهائي من متتابعة هندسية لانهائية:

لأي متتابعة هندسية (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ،.........................) اساسها ر : | ر | < ١

يكون مجموع عدد لانهائي من حدودها يعطى بالقانون:

$جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$: أ الحد الاول ، | ر | < ١

أمثلة محلولة

مثال (١) :

ايا من المتتابعات الهندسية التالية يمكن جمع عدد لانهائي من حدودها.

١) (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$..................)

٢) (١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ،..................)

الحل :

١) (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$..................) يمكن جمع عدد لانهائي من حدودها لان | ر | < ١

٢) (١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ،..................) لا يمكن جمع عدد لانهائي من حدودها لان | ر | > ١

تدريب (١):

ايا من المتتابعات الهندسية التالية يمكن جمع عدد لانهائي من حدودها

١) (١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$، $\frac{١}{٢٧}$، ....)

٢) (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨، ....)

مثال (٢) :

في المتتابعة الهندسية (٦٢٥، ١٢٥، ٢٥، ٥ ، ....) أوجد مجموع الستة حدود الاولى منها

هل يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها ابتداءً من الحد الاول ؟. أوجد هذا المجموع إن أمكن:

الحل :

أ = ٥ ، ر = ١٢٥÷ ٦٢٥ = $\frac{١}{٥}$ ، ن = ٦

$$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} \leftarrow جـ_٦ = \frac{٦٢٥(١ - (\frac{١}{٥})^٦)}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٣٩٠٦}{٥}$$

يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها بدء من الحد الاول لان ، ر = $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٥} < ١$

$$جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٦٢٥}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٣١٢٥}{٤}$$

تدريب (٢):

في المتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ،١، ....) أوجد مجموع العشرة حدود الاولى منها

هل يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها ابتداءً من الحد الاول ؟. أوجد هذا المجموع إن أمكن:

مثال (٣) :

متتابعة هندسية حدودها موجبة مجموع حدها الاول والثاني = ١٦ ، ومجموع عدد لانهائي من حدودها ابتداءً من حدها الاول =٢٥ .أوجد المتتابعة.



الحل :

نفرض أن المتتابعة الهندسية هي (؟ ، ؟ ر ، ؟ ر^{2} ،......................)

∴ $ح_{1} + ح_{2} = ١٦$ ← ؟ + ؟ ر = ١٦ ← ؟ (١+ر) = ١٦ ← ١)

$جـ_{\infty} = \frac{؟}{١ - ر}$ ← $\frac{؟}{١ - ر} = ٢٥$ ← ؟ = ٢٥(١-ر) ← ٢)

من ٢) في ١) ← ٢٥(١-ر) (١+ر) = ١٦ ← ١ - ر^{2} = $\frac{١٦}{٢٥}$ ← ر^{2} = $\frac{٩}{٢٥}$

← ر = ± $\frac{٣}{٥}$ وحيث ان حدودها موجبة ← ر = $\frac{٣}{٥}$

بالتعويض في ١) ← ؟ × (١ + $\frac{٣}{٥}$) = ١٦ ← ؟ × $\frac{٨}{٥}$ = ١٦ ← ؟ = ١٠

∴ المتتابعة الهندسية هي (١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ،......................)

تدريب (٣):

متتابعة هندسية غير منتهية ، حدودها موجبة ، حدها الاول يزيد عن حدها الثاني بمقدار ٣٠ ، مجموع عدد لانهائي من حدودها ابتداءً من حدها الأول يساوي $\frac{١٣٥}{٢}$.أوجد المتتابعة

حلول التدريبات

حل تدريب (١)

١) يمكن جمع عدد لانهائي من حدود المتتابعة الهندسية لان | ر | < ١

٢) لا يمكن جمع عدد لانهائي من حدود المتتابعة الهندسية لان | ر | > ١

حل تدريب (٢):

$جـ_{١٠} = \frac{١٠٢٣}{٦٤}$

يمكن جمع عدد لانهائي من حدود المتتابعة لان | ر | < ١ ويكون : $جـ_{\infty}$ = ١٦

حل تدريب (٣) (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ....)



تمارين على الدرس الخامس

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) في المتتابعة الهندسية (١ ، ـ٢ ، ٤ ، ـ٨ ، ....) مجموع العشرة حدود الاولي =......

(أ) ـ ٣٤١

(ب) ٣٤١

(ج) ٣١٤

(د) ـ٣١٤

٢) مجموع عدد لانهائي من حدود المتتابعة الهندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ....) ابتداءً من الحد الاول = ...

(أ) ١٦

(ب) ٣٢

(ج) ٦٤

(د) ٦١

٣) **مجموع حدود المتتابعة الهندسية (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢١٦ ، ١٢٨، ....، ١) يساوى ....**

(أ) ٢٠٤٧

(ب) ٢٠٤٨

(ج) ٤٠٤٨

(د) ٤٠٤٧



٤) مجموع عدد لانهائي من حدود المتتابعة الهندسية (١ ، جا $\frac{\pi}{٦}$ ، جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ ، ....)
ابتداءً من الحد الاول = ...

(أ) ٢

(ب) ٤

(ج) ٨

(د) ١٦

٥) متتابعة هندسية حدها الاول =٢٤٣ ، حدها الاخير =١ ، ومجموع حدودها= ٣٦٤

فيكون عدد حدودها =............ حداً

(أ) ٤

(ب) ٥

(ج) ٦

(د) ٧

اجابة تمارين الدرس الخامس

١) (أ) ٢) (أ) ٣) (أ) ٤) (أ) ٥) (ج)



الدرس الثالث ــ قواعد الاشتقاق

المفاهيم الاساسية للدرس:

(١) اذا كانت: ص= حـ حيث حـ ∈ ح فان: $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

(٢) اذا كانت: ص=س^ن حيث ن ∈ ح فان: $\frac{ءص}{ءس}$ = ن س^(ن - ١)

(٣) اذا كانت: ص = س فان: $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

(٤) اذا كانت : ص= ٢ س^ن فان: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ ن س^(ن - ١) (حيث ن ∈ ح ، ٢ ثابت)

(٥) $\frac{ء}{ءس}$ (ع ± ى) = $\frac{ءع}{ءس}$ ± $\frac{ءى}{ءس}$ حيث ع، ى دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س .

(٦) مشتقة حاصل ضرب دالتين :

اذا كانت : ع ، ى دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فان: الدالة (ع . ى) تكون

أيضاً قابلة للاستقاق بالنسبة للمتغير س ويكون: $\frac{ء}{ءس}$ (ع . ى) = ع × $\frac{ءى}{ءس}$ + ى × $\frac{ءع}{ءس}$

(٧) مشتقة حاصل قسمة دالتين :

اذا كانت : ع، ى دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكان ى (س) ≠ ٠ فان :

الدالة ($\frac{ع}{ى}$) تكون ايضا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س و يكون :

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ع}{ى}\right) = \frac{ى \times \frac{ءع}{ءس} - ع \times \frac{ءى}{ءس}}{(ى)^{٢}}$$



(٨) مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت : ص=د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع وكانت ع=ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فان: ص=د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

وتعرف بقاعدة السلسلة .

(٩) مشتقة الدالة $[د(س)]^{ن}$

اذا كانت : ع= $[د(س)]^{ن}$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فان :

$$\frac{ءع}{ءس} = ن[د(س)]^{ن-1} \times دَ(س)$$

(١٠) اذا كان $م_1$ ، $م_2$ ميلى مستقيمين معلومين $ل_1$ ، $ل_2$ فان

(١) $ل_1 // ل_2$ اذا وفقط اذا كان: $م_1 = م_2$ (شرط التوازى)

(٢) $ل_1 \perp ل_2$ اذا وفقط اذا كان: $م_1 م_2 = -1$ (شرط التعامد)

(١١) معادلتا المماس والعمودى لمنحنى:

اذا كانت: $(س_1 ، ص_1)$ نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د (س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة فان:

(١) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س_1 ، ص_1)$ هي: $ص - ص_1 = م (س - س_1)$

(٢) معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة $(س_1، ص_1)$ هى: $ص - ص_1 = \frac{-1}{م} (س - س_1)$



أمثلة محلولة

مثال (١): اوجد: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فى كل مما ياتى :

(١) $\text{ص} = -٧$ (٢) $\text{ص} = \text{س}^{٣}$ (٣) $\text{ص} = ٢\,\text{س}$

(٤) $\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}}$ (٥) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٣}}$ (٦) $\text{ص} = \sqrt{٣}$

الحل :

(١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ (٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{س}^{٢}$ (٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$

(٤) $\text{ص} = ٥\,\text{س}^{-١} \Longleftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٥\text{س}^{-٢} = \frac{-٥}{\text{س}^{٢}}$

(٥) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Longleftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}$ (٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

تدريب (١) اوجد: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فى كل مما ياتى :

(١) $\text{ص} = ٤$ (٢) $\text{ص} = ٣\pi\text{س}$ (٣) $\text{ص} = -٣\,\text{س}^{-٤}$

(٤) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ (٥) $\text{ص} = \sqrt{٣}\,\text{س}$

مثال (٢): اوجد: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ اذا كانت: $\text{ص} = ٥\text{س}^{٤} - ٣\,\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٢$

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢٠\,\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س} + ٧$

تدريب (٢) اوجد: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ اذا كانت: $\text{ص} = ٣\,\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٣$



مثال (٣) اوجد: $\frac{ءص}{ءس}$ اذا كانت: ص = (س^٣ + ١)(س^٢ + ٢)

ثم اوجد: $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ١

الحل ص = (س^٣ + ١)(س^٢ + ٢)

$\frac{ءص}{ءس}$ = (س^٣ + ١)(٢س) + (س^٢ + ٢)(٣س^٢)

= ٢ س^٤ + ٢س + ٣ س^٤ + ٦س^٢

= ٥س^٤ + ٦س^٢ + ٢ س

عندما س = ١ ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ + ٦ + ٢ = ١٣

تدريب (٣) اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ اذا كانت: ص = (٤س^٣ - ١)(٥س^٢ + ٢) ثم اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = -١

مثال (٤) اوجد: $\frac{ءص}{ءس}$ اذا كانت: ص = $\frac{٢س^٢ - ١}{س^٢ + ٣}$

الحل $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س^٢ + ٣)(٤س) - (٢س^٢ - ١)(٢س)}{(س^٢ + ٣)^٢}$

= $\frac{٤س^٣ + ١٢س - ٤س^٣ + ٢س}{(س^٢ + ٣)^٢}$ = $\frac{١٤س}{(س^٢ + ٣)^٢}$

تدريب (٤): اذا كانت : ص = $\frac{٣س - ٢}{٥س + ١}$ اوجد: $\frac{ءص}{ءس}$

مثال (٥) : اذا كانت : ص = (س^{٢} - ٣س + ٢)^{٥} اوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ (س^{٢} - ٣س + ٢)^{٤} (٢س – ٣)

حل اخر : بفرض ع = س^{٢} - ٣س + ٢ ص = ع^{٥}

$\frac{ء ع}{ء س}$ = ٢س - ٣ ، $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ٥ ع^{٤}

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ع}$ × $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٥ ع^{٤} × (٢س - ٣) = ٥ (س^{٢} - ٣س + ٢)^{٤} (٢س – ٣)

تدريب (٥):

إذا كانت : ص = (٣س^{٤} – ٥س)^{٧} اوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$

مثال (٦) :

إذا كانت: د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢س^{٢} + ٥س - ٤ اوجد قيم: س التي تجعل دَ(س) = ٢

الحل ∵ دَ(س) = ٢

∴ س^{٢} – ٤س + ٥ = ٢

س^{٢} – ٤س + ٣ = ٠

(س – ١) (س – ٣) = ٠

س = ١ او س = ٣

تدريب (٦):

اوجد قيم: س التي تجعل دَ(س) = ٧ إذا كانت : د(س) = س^{٢} - ٥س + ٢



مثال (٧): اوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^٣ - ٦س^٢ - ١٥س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

الحل : ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^٢ - ١٢س - ١٥

∵ المماس // محور السينات ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٣س^٢ - ١٢س - ١٥ = ٠ (بالقسمة على ٣)

س^٢ - ٤ س - ٥ = ٠ ⟸ (س - ٥) (س + ١) = ٠ ⟸ س = ٥ او س = -١

عند س = ٥ فان ص = -٨٠ وعند س = -١ فان ص = ٢٨

∴ النقط هى (٥ ، -٨٠) ، (-١ ، ٢٨)

تدريب (٧) اوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^٢ + $\frac{١}{س}$ - ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١

مثال (٨) : اوجد معادلة العمودى على المماس للمنحنى ص = $\frac{س^٢ - ١}{٢ - س^٢}$ عندما س = ٠

الحل : عند س = ٠ فان: ص = $\frac{-١}{٢}$

م = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢س}{(٢ - س^٢)^٢}$ عند س = ٠ فان م = ٠

∴ المماس يوازى محور السينات ⟵ العمودى موازيا محور الصادات

∴ معادلة العمودى على المماس هي س = ٠



تدريب (٨): اختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه :

(١) اذا كان: المستقيم ٢س - ص + ٧ = ٠ عموديا على منحنى الدالة د عند النقطة (-١،٥)

فان : دَ(١)= ....

ⓐ -٢ ⓑ $\frac{-١}{٢}$ ⓒ ٢ ⓓ $\frac{١}{٢}$

(٢) معادلة المماس للمنحنى ص = (س - ١)^{٢} عند النقطة (٢،١) هي: ....

ⓐ ص= ٢س - ٣ ⓑ ص= س - ١ ⓒ ص = ٢ س ⓓ س = ٢ ص - ٣

مثال (٩) : اذا كان: المنحنى ص = ﺃس^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص=٨س + ٥ عند النقطة (-١،-٣) فاوجد قيمتى: ﺃ ، ب .

الحل : ∵ النقطة (-١،-٣) تقع على المنحنى ∴ -٣ = -ﺃ + ب ⟵ (١)

ميل المماس = ٣ ﺃس^{٢} + ٢ ب س عندما س= -١

ميل المماس = ٣ ﺃ -٢ ب

∵ ميل المستقيم المماس =٨ ∴ ٣ ﺃ -٢ ب =٨ ⟵ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجدأن : ﺃ=٢ ، ب = -١

تدريب(٩): اوجد قيمة كل من الثابتين ﺃ ، ب اذا كان ميل المماس للمنحنى ص=س^{٢} + ﺃس + ب عند النقطة (١،٣) الواقعة عليه يساوى ٥.



حلول تدريبات الدرس الثالث

حل تدريب (١): (١) $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر (٢) $\frac{ءص}{ءس} = ٣\pi$ (٣) $\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^{-٥}$

(٤) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}}$ (٥) $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{٣}$

حل تدريب (٢): $\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٤س$

حل تدريب (٣): $\frac{ءص}{ءس} = (٤س^{٣} - ١)(١٠س) + (٥س^{٢} + ٢)(١٢س^{٢})$

$= ٤٠س^{٤} - ١٠س + ٦٠س^{٤} + ٢٤س^{٢}$

$= ١٠٠س^{٤} + ٢٤س^{٢} - ١٠س$ عندما س = -١

فان: $\frac{ءص}{ءس} = ١٠٠(-١)^{٤} + ٢٤(-١)^{٢} - ١٠(-١) = ١٣٤$

حل تدريب (٤): $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٥س + ١)(٣) - (٣س - ٢)(٥)}{(٥س + ١)^{٢}}$

$= \frac{١٥س + ٣ - ١٥س + ١٠}{(٥س + ١)^{٢}} = \frac{١٣}{(٥س + ١)^{٢}}$

حل تدريب (٥): $\frac{ءص}{ءس} = ٧(٣س^{٤} - ٥س)^{٦}(١٢س^{٣} - ٥)$

حل تدريب (٦): ٢س - ٥ = ٧ ⟵ س = ٦



حل تدريب (٧):

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − $(\frac{١}{س})^٢$ عند س = ١ ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ - ١ = ١

ميل المماس = ظا ل = $\frac{ءص}{ءس}$ ⟸ ظا ل = ١ ∴ ل = ٤٥°

حل تدريب (٨):

(١) ب $\frac{-١}{٢}$ (٢) أ ص = ٢س - ٣

حل تدريب (٨):

(١،٣) تقع على المنحنى ⟸ ٣ = ١ + أ + ب ⟸ أ + ب = ٢

∵ ميل المماس = ٥ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س + أ

عند س = ١ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ + أ ⟸ ٢ + أ = ٥

∴ أ = ٣ ، ب = -١



تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(٥\right) =$ ....

(أ) ٥ (ب) -٥ (ج) صفر (د) ٥س

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(٧\pi\right) =$ ....

(أ) ٧ (ب) π (ج) -٧ (د) صفر

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س}^{٦}\right) =$ ....

(أ) ٦ (ب) $٦\text{س}^{٥}$ (ج) $٦\text{س}^{٤}$ (د) -٦

(٤) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(٤\text{س}^{٣}\right) =$ ....

(أ) $٧\text{س}^{٢}$ (ب) $\text{س}^{٢}$ (ج) $١٢\text{س}^{٢}$ (د) $-١٢\text{س}^{٣}$

(٥) اذا كانت: $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ فان: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ ....

(أ) $٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}}$ (ب) $\frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{-١}{٢}}$ (ج) $\text{س}^{\frac{-١}{٢}}$ (د) $\frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

(٦) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٥} =$ ....

(أ) $٥\text{س}^{٤}$ (ب) $٥\text{س}^{-٤}$ (ج) $-٥\text{س}^{-٦}$ (د) $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٥}$

(٧) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٢\right) =$ ....

(أ) ٦س + ٥ (ب) ٦س - ٥ (ج) ٦س (د) -٥



(٨) ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + ٢س + ١ عند س=١ يساوى ....

أ ٢س   ب ٢س - ٢   ج ٤   د -٤

(٩) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص=٢س^{٥} - ٩س مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

عند س=١ تساوى ....

أ ٣٠°   ب ٤٥°   ج ٦٠°   د ٩٠°

(١٠) اذا كانت: د(س)=س^{٢} + أس + ٤ ، دَ(١)= ٥ فان: أ = ...

أ -٣   ب ٣   ج ٧   د ٢

(١١) اذا كانت: س ص = ٣ فان: $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

أ $\frac{٣}{س^{٢}}$ ب $\frac{-٣}{س^{٢}}$ ج -٣س^{٢} د $\frac{-٣}{س}$

(١٢) اذا كانت: د(س) = (٢س + ١)^{٥} فان: دَ(٠) = ...

أ ٣٢   ب ٥   ج ١٠   د ٢٠

(١٣) اذا كانت :د(س) = (٥ - ٢س)^{٢} فان: دَ(١)= ....

أ ١٢   ب -١٢   ج -٤   د ٤

(١٤) اذا كان : (س+ ص)^{٣} = ٥ فان: $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

أ -١   ب صفر   ج ٥   د ٣

(١٥) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س)= س^{٢} + ٣ عندما س = ١ هى ....

أ ص=٢س   ب س + ص=٢   ج ص-٢س=٢   د ٣س-ص+٢ =٠

(١٦) اذا كانت: معادلة العمودى على منحنى د(س) عند النقطة (٢ ،-١) هى س-٢ ص=٤ فان :

دَ(٢)= .....

أ ٢ ب -٢ ج ١ د -١

(١٧) اذا كان : المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س)= أ س^{٢} + ب س + ٥ عند النقطة (-١، ٣) الواقعة

عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فان: أ + ب =.............

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

(١٨)النقطة الواقعة على المنحنى ص=٢س^{٣} -س + ٣ والتى عندها المماس يكون عموديا على المستقيم

س =١- ٥ ص هى.........

أ (١، ٢) ب (١،-٤) ج (١، ٤) ، (-١، ٢) د (١،-٤) ، (١، ٢)



إجابة تمارين على الدرس الثالث

١	(ج) صفر	١٠	(ب) ٣
٢	(د) صفر	١١	(ب) $\frac{-٣}{س^{٢}}$
٣	(ب) ٦س^{٥}	١٢	(ج) ١٠
٤	(ج) ١٢س^{٢}	١٣	(ب) -١٢
٥	(ب) $\frac{١}{٢}$س$^{\frac{-١}{٢}}$	١٤	(أ) -١
٦	(ج) -٥ س$^{-٦}$	١٥	(ج) ص-٢ س=٢
٧	(ب) ٦س - ٥	١٦	(ب) -٢
٨	(ج) ٤	١٧	(د) ٤
٩	(ب) ٤٥°	١٨	(ج) (١، ٤) ، (-١، ٢)



الدرس الرابع: التكامل:

المفاهيم الاساسية للدرس:

(١) المشتقة العكسية للدالة

(أ) يقال ان الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د اذا كانت: $ت'(س) = د(س)$ لكل س فى مجال د

(ب) اذا كانت: $ت'(س) = د(س)$ فان : $\int د(س)\, دس = ت(س) + ث$ حيث ث ثابت اختيارى

(ثابت التكامل)

(٢) خواص التكامل: اذا كانت: د ، ر دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فان:

(أ) $\int أ\, د(س)\, دس = أ \int د(س)\, دس$ حيث أ ثابت $\neq 0$

(ب) $\int [د(س) \pm ر(س)]\, دس = \int د(س)\, دس \pm \int ر(س)\, دس$

ملحوظة: (يمكن تعميم هذه الخاصية (ب) على أي عدد محدود من الدوال)

(٣) بعض قواعد التكامل :

(١) $\int س^{ن}\, دس = \frac{س^{ن+1}}{(ن+1)} + ث$ ،حيث ث ثابت ، $ن \neq -1$

(٢) $\int (أس + ب)^{ن}\, دس = \frac{(أس + ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + ث$ ،حيث ث ثابت ، $ن \neq -1$

أمثلة محلولة

مثال (١): اثبت ان الدالة ت حيث $ت(س) = \frac{1}{2} س^{4}$ هى مشتقة عكسية للدالة د حيث $د(س) = 2س^{3}$

الحل : نوجد مشتقة الدالة ت $\Longleftarrow$ $ت'(س) = 4 \times \frac{1}{2} س^{3} = 2س^{3} = د(س)$

$\therefore$ ت(س) مشتقة عكسية للدالة د(س)

تدريب (١) بين ان الدالة ت حيث $ت(س) = \frac{1}{2} س^{6}$ هى مشتقة عكسية للدالة د حيث $د(س) = 3س^{5}$

مثال (٢): (١) اوجد : $\int$ س^٦ ء س (٢) اوجد : $\int$ س^-٣ ء س

(٣) اوجد : $\int$ س^(٢/٥) ء س (٤) اوجد : $\int$ √س ء س

الحل : (١) $\frac{١}{٧}$ س^٧ + ث (٢) $\frac{-١}{٢}$ س^-٢ + ث

(٣) $\frac{٥}{٧}$ س^(٧/٥) + ث (٤) $\frac{٢}{٣}$ س^(٣/٢) + ث

تدريب (٢) اوجد: (١) $\int$ س^٨ ء س (٢) $\int$ س^(٣/٢) ء س

(٣) $\int$ س^(٣/٥) ء س (٤) $\int$ ٧ س^(٧/٩) ء س

مثال (٣): اوجد: (١) $\int$ (٥س + ٣ س^٢) ء س (٢) اوجد : $\int \frac{(س^٤ + ٤س^٢ + ٤)}{س^٢}$ ء س

الحل: (١) $\int$ (٥س + ٣ س^٢) ء س = $\frac{٥}{٢}$ س^٢ + س^٣ + ث

(٢) $\int \frac{(س^٤ + ٤س^٢ + ٤)}{س^٢}$ ء س

= $\int$ (س^٢ + ٤ + ٤ س^-٢) ء س

= $\frac{١}{٣}$ س^٣ + ٤ س − $\frac{٤}{س}$ + ث

تدريب (٣): اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة: $\int$ ٥س^٤ ء س = ... + ث

(أ) س^٥ (ب) $\frac{١}{٤}$ س^٤ (ج) ٥س^٥ (د) -٢ س^٣



مثال (٤): اوجد : $\int (٥\text{س} + ٣)^{٤} \, \text{ءس}$

الحل : $\int (٥\text{س} + ٣)^{٤} \, \text{ءس} = \frac{١}{٢٥} (٥\text{س} + ٣)^{٥} + \text{ث}$

تدريب (٤): اخترالاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة: $\int (٣\text{س} - ٢)^{٣} \, \text{ءس} = \text{.........} + \text{ث}$

(أ) $(٣\text{س} - ٢)^{٤}$ (ب) $\frac{١}{٤} (٣\text{س} - ٢)^{٤}$ (جـ) $\frac{١}{١٢} (٣\text{س} - ٢)^{٤}$ (د) $\frac{-١}{١٢} (٣\text{س} - ٢)^{٢}$

مثال (٥): اوجد: $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} \, \text{ءس}$

الحل: $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} \, \text{ءس} = \int \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{\text{س} - ٣} \, \text{ءس}$

$= \int (\text{س} + ٣) \, \text{ءس} = \frac{١}{٢} \text{س}^{٢} + ٣\text{س} + \text{ث}$

تدريب (٥): اوجد: $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} \, \text{ءس}$



حلول تدريبات الدرس الرابع

حل تدريب (١): نوجد مشتقة ت (س) = ٦ × $\frac{١}{٢}$ س^٥ = ٣ س^٥ = د(س)

∴ ت (س) مشتقة عكسية للدالة د(س)

حل تدريب (٢): (١) $\frac{١}{٩}$ س^٩ + ث

(٢) $\frac{٢}{٥}$ س^$\frac{٥}{٢}$ + ث

(٣) $\frac{٥}{٨}$ س^$\frac{٨}{٥}$ + ث

(٤) $\frac{٦٣}{١٦}$ س^$\frac{١٦}{٩}$ + ث

حل تدريب (٣): (أ) س^٥

حل تدريب (٤): (ج) $\frac{١}{١٢}$ (٣س-٢)^٤

حل تدريب (٥):

∫ $\frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{س - ٣}$ ءس = ∫ (س^٢ + ٣س + ٩) ءس

= $\frac{١}{٣}$ س^٣ + $\frac{٣}{٢}$ س^٢ + ٩س + ث



تمارين على الدرس الرابع

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

(١) $\int$ ٥س^{٢} ءس = ...+ ث

أ ٥س^{٣} ب ١٠س ج $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} د $\frac{٣}{٥}$ س^{٣}

(٢) $\int$ ٤ س^{٣} ءس = ... + ث

أ س^{٤} ب - س^{٤} ج ١٢س^{٢} د ٤ س^{٢}

(٣) $\int$ (٥س-١)^{٣} ءس = ... + ث

أ (٥س-١)^{٤} ب ٤(٥س-١)^{٣} ج $\frac{١}{٤}$ (٥س-١)^{٤} د $\frac{١}{٢٠}$ (٥س-١)^{٤}

(٤) $\int$ ٥ ءس = ...+ ث

أ صفر ب ٥ ج ٥س د ٥س^{٢}

(٥) المشتقة العكسية للدالة د : د(س) = ٣س^{٢} -٢س + ٥ هى ....

أ ٦س-٢ ب ٣س^{٢} -٢س + ٥

ج س^{٣} - س^{٢} + ٥س + ث د $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٥س + ث

(٦) $\int$ ٢(٣ع^{٢} -٥) ءع = ... + ث

أ (٣ع^{٢} -٥)^{٢} ب ٦ع^{٢} -١٠ ج ٢ع^{٣} -١٠ع د ع^{٢} -٥ع



(٧) $\int (\text{س}+١)(\text{س}-٥)\,\text{ءس} = \text{.............} + \text{ث}$

أ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س}$ ب $\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س}$

جـ $\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س}$ د $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س}$

(٨) $\int \text{س}(\text{س}+٣)\,\text{ءس} = \text{.............} + \text{ث}$

أ $\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ب $\frac{١}{٢}(\text{س}+٣)^{٢}$ جـ $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}$ د $\text{س}^{٣} + ٣\text{س}$

(٩) $\int (\text{س}+٢)(\text{س}-٢)\,\text{ءس} = \text{.............} + \text{ث}$

أ $\text{س}+٤$ ب $\text{س}^{٢} - ٤\text{س}$ جـ $(\text{س}^{٢}-٤)^{٢}$ د $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٤\text{س}$

(١٠) $\int (\text{س}^{٢}-٢)^{٢}\,\text{ءس} = \text{.............} + \text{ث}$

أ $\frac{١}{٣}(\text{س}^{٢}-٢)^{٣}$ ب $٢(\text{س}^{٢}-٢)(٢\text{س})$

جـ $\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} - \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س}$ د $\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢} + ٤$

(١١) $\int (٨-٣\text{س})^{٤}\,\text{ءس} = \text{.............} + \text{ث}$

أ $\frac{١}{١٥}(٨-٣\text{س})^{٥}$ ب $\frac{١}{٥}(٨-٣\text{س})^{٥}$

جـ $\frac{-١}{٥}(٨-٣\text{س})^{٥}$ د $\frac{-١}{١٥}(٨-٣\text{س})^{٥}$

(١٢) $\int$ س^{٥} $\left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥}$ ءس = ... + ث

أ $(\text{س} + ٣)^{٥}$

ب $\frac{١}{٦}(\text{س} + ٣)^{٦}$

ج $\frac{١}{٦}\left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٦}$

د $\frac{١}{٣٦}$ س^{٦} $\left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٦}$

(١٣) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}{\text{س}}$ ءس = ... + ث

أ س + ٥

ب س^{٢} + ٥س

ج $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٥س

د س + $\frac{٥}{\text{س}}$

(١٤) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}$ ءس = ... + ث

أ $\frac{١}{٤}(\text{س} - ٢)^{٤}$

ب س - ٢

ج $\frac{١}{٢}$ س^{٢} - ٢س

د $\frac{١}{٢}(\text{س} - ٤)^{٢}$



إجابة تمارين على الدرس الرابع

١	ح $\frac{5}{3}$ س^{3}	٨	ح $\frac{1}{3}$ س^{3} + $\frac{3}{2}$ س^{2}
٢	أ س^{4}	٩	د $\frac{1}{3}$ س^{3} - ٤س
٣	د $\frac{1}{20}$ (٥س-١)^{4}	١٠	ح $\frac{1}{5}$ س^{5} - $\frac{4}{3}$س^{3} + ٤س
٤	ح ٥س	١١	د $\frac{-1}{15}$ (٨-٣س)^{5}
٥	ح س^{3} - س^{2} + ٥س + ث	١٢	ب $\frac{1}{6}$(س + ٣)^{6}
٦	ح ٢ع^{3} -١٠ع	١٣	ح $\frac{1}{2}$ س^{2} + ٥س
٧	د $\frac{1}{3}$ س^{3} -٢س^{2} - ٥س	١٤	ح $\frac{1}{2}$ س^{2} -٢س

حمل الآن

مجانا وحصريا

المراجعة رقم (3)

اختبار شهر مارس





مجموع (ن) من حدود متتابعة حسابية :

- جـ ن = ن/٢ (أ + ل)   يستخدم القانون الأول إذا عُلم ن ، أ ، ل
- جـ ن = ن/٢ [٢ أ + (ن – ١) ء]   يستخدم القانون الثانى إذا عُلم ن ، أ ، ء

ملاحظات (١) إذا كان مجموع الحدود الموجبة فقط ⟸ ح ر > صفر

(٢) إذا كان المجموع أكبر مايمكن = مجموع الحدود الغير السالبة ⟸ ح ر ≥ صفر

(٣) إذا طلب (ن) لكى يكون المجموع موجب ⟸ حـ ن > ٠

(٤) إذا طلب (ن) لكى يكون المجموع سالب ⟸ حـ ن < ٠

مثـــال١: أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٠}$ (٣٧ – ٣ ر)

الحــــــــل

عدد الحدود ن = ٢٠ – ر + ١ = ٢٠ – ٥ + ١ = ١٦ ، ح ر = ٣٧ – ٣ ر

∴ ح٥ = ٣٧ – ٣×٥ = ١٢ ، ح٢٠ = ٣٧ – ٣×٢٠ = –٢٣

∵ جـ ن = ن/٢ (أ + ل) ∴ جـ١٦ = ٨ (١٢ – ٢٣) = –٨٨

مثـــال٢: أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٤}$ (٤ ر – ٣)

الحــــــــل

عدد الحدود ن = ٢٤ – ر + ١ = ٢٤ – ٥ + ١ = ٢٠ ، ح ر = ٤ ر – ٣

∴ ح٥ = ٤×٥ – ٣ = ١٧ ، ح٢٠ = ٤×٢٤ – ٣ = ٩٣

∵ جـ ن = ن/٢ (أ + ل) ∴ جـ١٦ = ١٠ (١٧ + ٩٣) = ١١٠٠

مثـــال٣: أوجد (ح ن) = (٢ ن + ١) ثم أوجد $\sum_{ر=١}^{٢٠}$ (٢ ر + ١)

الحــــــــل

ح١ = ٢×١+١ = ٣ ، ح٢ = ٢×٢+١ = ٥ ، ح٣ = ٢×٣+١ = ٧

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

∵ جـ ن = ن/٢ [٢ أ + (ن – ١) ء]

∴ جـ٢٠ = ٢٠/٢ [٢ × ٣ + (٢٠ – ١) × ٢] = ١٠ × (٦ + ٣٨) = ٤٤٠

مثـــ٤ـــال: ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٢ = ١٣$ ومجموع العشر حدود الأولى منها ٢٣٥ أوجد المتتابعة .

الحـــــــــل

$ح_٢ = أ + ء = ١٣$ ∴ $أ = ١٣ - ء$ ... (١)

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

∴ $جـ_{١٠} = ٥ [٢ أ + ٩ء] = ٢٣٥$ ∴ $٢ أ + ٩ء = ٤٧$ ... (٢)

نعوض من (١) فى (٢) ∴ $٢٦ - ٢ء + ٩ء = ٤٧$

∴ $٧ء = ٢١$ ∴ $ء = ٣$

نعوض فى (١) ∴ $أ = ١٣ - ٣ = ١٠$

∴ المتتابعة هى (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

مثـــ٥ـــال: أوجد ($ح_ن$) من المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ثم أوجد كم حداً يلزم أخذها من حدود هذه المتتابعة ابتداء من $ح_{١٥}$ ليكون المجموع مساوياً ــ ١٩٥

الحـــــــــل

∵ $أ = ٢٥$ ، $ء = ٢١ - ٢٥ = -٤$

$ح_{١٥} = أ + ١٤ء = ٢٥ + ١٤ \times (-٤) = ٢٥ - ٥٦ = -٣١$

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$ " لاحظ أن الحد الأول هنا هو $ح_{١٥}$ "

∴ $-١٩٥ = \frac{ن}{٢} [٢ \times (-٣١) + (ن - ١) \times (-٤)]$

∴ $-١٩٥ = \frac{ن}{٢} (-٦٢ - ٤ن + ٤) = \frac{ن}{٢} (-٤ن - ٥٨)$

∴ $-١٩٥ = -٢ن^٢ - ٢٩ن$ ∴ $٢ن^٢ + ٢٩ن - ١٩٥ = ٠$

∴ $(٢ن + ٣٩) (ن - ٥) = ٠$

إما $٢ن + ٣٩ = ٠$ ومنها $ن = \frac{-٣٩}{٢}$ وهو مرفوض

أو $ن - ٥ = ٠$ ومنها $ن = ٥$



مثـــــ٦ـــال: أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية(١ ، ٣ ، ٥ ،...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٤٠٠

الحـــــــــــل

∵ ا = ١ ، ء = ٢ ، جـ~ن~ = ٤٠٠ ، ن = ؟؟

∵ $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} [\,٢\text{ا} + (\text{ن} - ١)\,\text{ء}\,]$

∴ $٤٠٠ = \frac{\text{ن}}{٢} [\,٢ + (\text{ن} - ١) \times ٢\,] = \frac{\text{ن}}{٢} (\,٢ + ٢\text{ن} - ٢\,)$

$= \frac{\text{ن}}{٢} \times ٢\text{ن} = \text{ن}^{٢}$ ∴ $\text{ن}^{٢} = ٤٠٠$ ∴ ن = ٢٠

مثـــ٧ـــال: أوجد $\text{ح}_{\text{ن}}$ من المتتابعة الحسابية التى فيها $\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ن}^{٢} - ٢\text{ن}$

الحـــــــــــل

نضع : ن = ١ فى $\text{جـ}_{\text{ن}}$

∴ $\text{جـ}_{١} = ١ - ٢ = -١$ ∴ $\text{ح}_{١} = -١$ ∴ ا = -١

نضع ن = ٢ فى $\text{جـ}_{\text{ن}}$

∴ $\text{جـ}_{٢} = ٠$ ∴ $\text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} = ٠$ ∴ $-١ + \text{ح}_{٢} = ٠$ ∴ $\text{ح}_{٢} = ١$

∴ $\text{ء} = \text{ح}_{٢} - \text{ح}_{١} = ١ - (-١) = ٢$

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ا} + (\text{ن} - ١)\text{ء} = -١ + (\text{ن} - ١) \times ٢ = -١ + ٢\text{ن} - ٢ = ٢\text{ن} - ٣$

مثـــ٨ـــال: إذا كانت $(\text{ح}_{\text{ن}})$ متتابعة حسابية حيث $\text{جـ}_{\text{ن}}$ مجموع ن من حدودها الأولى وكان $\text{جـ}_{\text{ن}} \times (\,٤\text{ن} + ٢\,) = \text{جـ}_{٢\text{ن}} \times (\text{ن} + ١)$ فأثبت أن $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{ح}_{١}$

الحـــــــــــل

نضع: ن = ١ ∴ $\text{جـ}_{١} \times ٦ = \text{جـ}_{٢} \times ٢$ بالقسمة على ٢

∴ $٣\,\text{ح}_{١} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢}$ ∴ $٣\text{ا} = \text{ا} + \text{ا} + \text{ء}$ ∴ $\text{ا} = \text{ء}$

∴ $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ا} + (\text{ن} - ١)\,\text{ء} = \text{ا} + (\text{ن} - ١)\,\text{ا} = \text{ا} + \text{ن}\,\text{ا} - \text{ا} = \text{ن}\,\text{ا} = \text{ن}\,\text{ح}_{١}$

مثـــ٩ـــال: متتابعة حسابية مجموع حدودها الثانى والرابع والسادس ٣٦ ومجموع العشر حدود الأولى منها ٩٠ . أوجد المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من حدود هذه

المتتابعة يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالباً .

الحـــــل

ح٢ + ح٤ + ح٦ = (أ + ء) + (أ + ٣ء) + (أ + ٥ء) = ٣٦

∴ ٣أ + ٩ء = ٣٦ ∴ أ + ٣ء = ١٢ ∴ أ = ١٢ − ٣ء ... (١)

∵ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء] ∴ ٩٠ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢أ + ٩ء]

∴ ٢أ + ٩ء = ١٨ ... (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ٢٤ − ٦ء + ٩ء = ١٨ ∴ ٣ء = −٦ ∴ ء = −٢

بالتعويض فى (١) ∴ أ = ١٢ + ٦ = ١٨

∴ المتتابعة هى (١٨ ، ١٦ ، ١٤ ، ...)

جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ١٨ + (ن − ١) × (−٢)] = $\frac{ن}{٢}$ (٣٦ − ٢ن + ٢)

= $\frac{ن}{٢}$ (٣٨ − ٢ن) < ٠ ∴ ٣٨ − ٢ن < ٠ ∴ ١٩ < ن ∴ ن = ٢٠

مثـــ١٠ـــال: كم حداً يلزم أخذها من حدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٢٩ ، ٢٥ ،...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموعها أكبر ما يمكن وأوجد هذا المجموع .

الحـــــل

∵ أ = ٣٣ ، ء = ٢٩ − ٣٣ = −٤

يكون المجموع أكبر ما يمكن عندما نجمع الحدود غير السالبة

حن = أ + (ن − ١) ء = ٣٣ + (ن − ١) × (−٤) = ٣٣ − ٤ن + ٤

حن = ٣٧ − ٤ن > ٠ ∴ −٤ن > −٣٧ ∴ ن < ٩.٢٥ ∴ ن = ٩

∵ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء]

∴ جـن = $\frac{٩}{٢}$ [٢ × ٣٣ + ٨ × (−٤)] = $\frac{٩}{٢}$ × ٣٤ = ١٥٣



مثـــال ١١: أوجد مجموع الحدود الثمانية الأخيرة من المتتابعة الحسابية
(١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... ، ٧١)

الحـــــــل

نكتب المتتابعة من النهاية فتكون (٧١ ، ٦٨ ، ٦٥ ، ... ، ١١)

∴ أ = ٧١ ، ء = -٣ ، ن = ٨

∵ جـن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

∴ جـن = ٤ [٢ × ٧١ + ٧ × (-٣)] = ٤ (١٤٢ − ٢١) = ٤٨٤

مثـــال ١٢: المتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) عدد حدودها زوجى ومجموع النصف الأول من حدودها أقل من مجموع بقية الحدود بمقدار ٤٠٠ . أوجد عدد حدودها .

الحـــــــل

∴ أ = ٣ ، ء = ٤ ، نفرض أن عدد الحدود = ٢ن

∵ مجموع المتتابعة = جـ٢ن = ٢ن/٢ [٢أ + (٢ن − ١) ء]

= ن [٦ + (٢ن − ١) × ٤] = ن (٦ + ٨ن -٤) = ٨ن^{٢} + ٢ن

النصف الأول من الحدود يبدأ بـ ح١ وينتهى بـ حن وعدد حدوده ن

∴ مجموع النصف الأول = ن/٢ (ح١ + حن) = ن/٢ [أ + أ + (ن − ١) ء]

= ن/٢ [٦ + (ن − ١) × ٤] = ن/٢ (٦ + ٤ن − ٤) = ٢ن^{٢} + ن

مجموع باقى الحدود = مجموع المتتابعة ـــ مجموع النصف الأول

= (٨ن^{٢} + ٢ن) − (٢ن^{٢} + ن) = ٦ن^{٢} + ن

∴ (٦ن^{٢} + ن) − (٢ن^{٢} + ن) = ٤٠٠   ∴ ٤ن^{٢} = ٤٠٠

∴ ن^{٢} = ١٠٠   ∴ ن = ١٠   ∴ عدد الحدود = ٢٠ حداً

مثـــال ١٣: متتابعة حسابية مجموع الستة حدود الأولى منها ١٥٩ ، ومجموع السبعة حدود التالية لها ٤٩ . أوجد هذه المتتابعة .

الحـــــــل

∵ ج٦ = ١٥٩ ، ∵ جن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

∴ ١٥٩ = ٦/٢ (٢أ + ٥ء) ∴ ٢ أ + ٥ء = ٥٣ ... (١)

ج١٣ = ١٥٩ + ٤٩ = ٢٠٨

∴ ٢٠٨ = ١٣/٢ (٢أ + ١٢ء) ∴ ٢أ + ١٢ء = ٣٢ ... (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ٧ء = - ٢١ ∴ ء = - ٣

نعوض فى (١) ∴ ٢ أ − ١٥ = ٥٣ ∴ ٢ أ = ٦٨ ∴ أ = ٣٤

∴ المتتابعة هى (٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ، ...)

مثـــ١٤ـــال: أوجد مجموع ٢٠ حداً الأولى من المتتابعة (حن) حيث

حن = { ٢ن − ٤ ، ن فردية
 ٣ن + ٢ ، ن زوجية }

الحـــــــل

المتتابعة الأولى :

حن = ٢ن − ٤ عندما ن ∈ { ١ ، ٣ ، ٥ ، ... }

وهى (- ٢ ، ٢ ، ٦ ، ...) وفيها أ = - ٢ ، ء = ٤ ، ن = ١٠

مجموعها = ١٠/٢ [٢ × - ٢ + ٩ × ٤] = ١٦٠

المتتابعة الثانية :

حن = ٣ن + ٢ عندما ن ∈ { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ... }

وهى (٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ...) وفيها أ = ٨ ، ء = ٦ ، ن = ١٠

مجموعها = ١٠/٢ [٢ × ٨ + ٩ × ٦] = ٣٥٠

∴ مجموع العشرين حداً = ١٦٠ + ٣٥٠ = ٥١٠



مثـــال ١٥: وضعت ٢٠ كرة على خط مستقيم بحيث كانت المسافة بين كل كرتين متتاليتين ٥ أمتار . أوجد المسافة التى يقطعها شخص ما يبدأ من موضع الكرة الأولى ليحضر هذه الكرات واحدة بعد الأخرى ويضعها فى صندوق عند موضع الكرة الأولى .

الحـــــــــــــل

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار أول كرة = ٠ متراً

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار ثان كرة = ١٠ متراً

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار ثالث كرة = ٢٠ متراً

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار رابع كرة = ٣٠ متراً

∴ مجموع المسافات = ٠ + ١٠ + ٢٠ + ٣٠ + ٤٠ + ... إلى ٢٠ حداً

وهذه متتابعة حسابية فيها أ = ٠ ، ء = ١٠ ، ن = ٢٠

∴ مجموع المسافات = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٠ + ١٩ × ١٠] = ١٩٠٠ متراً

مثـــال ١٦: متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، حدها الأخير = ـ ٢٦ ومجموع حدودها = ـــ ١٤٠ . أوجد هذه المتتابعة.

الحـــــــــــــل

∵ أ = ١٢ ، ل = ـ ٢٦ ، جـ$_{ن}$ = ـــ ١٤٠

∵ جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

∴ ـ ١٤٠ = $\frac{ن}{٢}$ (١٢ – ٢٦) = ـ ٧ ن ∴ ن = ٢٠

∵ ل = أ + (ن – ١) ء ∴ ـ ٢٦ = ١٢ + ١٩ ء

∴ ـ ٣٨ = ١٩ ء ∴ ء = ـ ٢

∴ المتتابعة هى (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، ـ ٢٦)

تمارين على مجموع المتتابعة الحسابية

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر + ١)$

ⓐ ٢٥ ⓑ ٣٠ ⓒ ٣٥ ⓓ ٤٠

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(٢) عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع مساوياً الصفر هو ....

(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢٢

(٣) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣٧ ، ٣٤ ، ٣١ ، ... ، -٨٠) يساوى ....

(أ) ٨٦٠ (ب) -٨٦٠ (جـ) ٦٨٠ (د) -٦٨٠

(٤) $جـ_{ن}$ من المتتابعة الحسابية $(ح_{ن}) = (٢ن - ٣)$ هو ....

(أ) $ن^{٢} + ٢$ (ب) $ن^{٢} - ٢ن$ (جـ) $ن^{٢} + ٢ن$ (د) $ن^{٢} - ٢$

(٥) مجموع الحدود الثمانية الأخيرة من المتتابعة الحسابية (١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... ، ٧١)

(أ) ٦٥٢ (ب) ٤٨٤ (جـ) ٢٦٠ (د) ١٣٠

(٦) قيمة المتسلسلة ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن - ١ هى ....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر - ١)$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن} (٤ر - ٥)$

(٧) قيمة المتسلسلة ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٧ هى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ر + ٣)$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ١)$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

١) متتابعة حسابية فيها $ح_{٢} = -٢٨$ ، $ح_{٣} + ح_{٤} = -٤٤$ أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذها بدءا من حدها الأول ليكون المجموع صفراً

٢) متتابعة حسابية فيها $ح_٦$ = ١٢ ، $ح_٢ + ح_٤$ = ٤٢ أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذها بدءا من حدها الأول ليكون المجموع صفر

٣) أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١، ٣، ٥، ٠٠٠٠) إبتداءاً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويا ٤٠٠

٤) كم حدا يلزم أخذها من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥، ٣٠، ٢٥، ٠٠٠٠) بدءا من حدها الأول ليكون المجموع مساويا ١٣٥ وفسر معنى الجوابين

٥) إذا كانت (٢ ، ٢ ب ، ٠٠٠٠٠٠٠٠ ، ٢٠ ب ، ٨٦) متتابعة حسابية أوجد قيمة ب ثم أوجد مجموع حدود هذه المتتابعة بدءا من حدها الثالث

٦) أوجد مجموع ٣٠ حدا من حدود المتتابعة الحسابية ($ح_ن$) = (٢ن – ١) بدءاً من $ح_{١٥}$

٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، حدها الأخير = – ٢٦ ، مجموع حدودها = – ١٤٠ أوجد المتتابعة

٨) متتابعة حسابية حدها الأول = ٢ ، مجموع العشرة حدود الأولى منها = ٣٣٥ أوجد المتتابعة

٩) أوجد مجموع الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١٧ ، ١٧٠ والتى تقبل القسمة على ٧

١٠) إذا كان ١ + ٧ + ١٣ + ٠٠٠٠٠٠ + س = ٢٨٠ أوجد قيمة س

١١) مجموع الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة حسابية ٥٦، مجموع الحدود الأربعة الأخيرة منها ١١٢ ، حدها الأول ١١ أوجد حدها الأخير وعدد حدودها



١٢) متتابعة حسابية مجموع ن حدا الأولى منها = $\frac{1}{2}$ مجموع ن حدا التالية لها أوجد النسبة بين مجموع ٣ن حدا الأولى منها : مجموع ن حدا الأولى منها

١٣) متتابعة حسابية مجموع حدودها بدءا من حدها الثانى = – ٣٦ ، مجموع حدودها عدا حدها الأخير = ٠ ، الفرق بين حدها العاشر وحدها السادس = –١٦ أوجد المتتابعة

١٤) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢ن حدا فيها $ع_{ن-١}$ = ٤٢ ، $ع_{٢ن}$ = ٧٨ ، مجموع ن حدا الأخيرة منها = ٦٠٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع ن حدا الأولى منها

١٥) متتابعة حسابية فيها $ع_{١}$ = – ٤ ، $ع_{ن}$ = ١١ ، $ع_{٢ن-١}$ = ٤٤ أوجد $ع_{٢ن-٣}$

١٦) إذا كان مجموع ن حدا الأولى من متتابعة يعطى بالقانون $ح_{ن}$ = ٢ن (ن+٣) فإثبت أنها متتابعة حسابية وأوجد حدها العشرين ، مجموع العشرين حدا الأولى منها

١٧) إذا كان مجموع ن من حدود متتابعة يعطى بالعلاقة $ح_{ن}$ = ٢ن^{٢} إثبت أنها حسابية وأوجد حدها السابع

١٨) متتابعة حسابية فيها النسبة بين $ح_{ن}$ الأولى منها : $ح_{٢ن}$ الأولى منها = ٣ن – ١ : ١٢ن – ٢ ، مربع حدها الرابع ٤٠٠ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها

١٩) إثبت أن $(ع_{ن})$ = (٤ن – ١) متتابعة حسابية وإذا كانت النسبة بين مجموع الثلث الأول من حدودها : مجموع باقى حدودها = ٧ : ٥٤ أوجد عدد حدودها

٢٠) أوجد $ح_{٣٠}$ حدا الأولى من المتتابعة الحسابية $(ع_{ن})$ = { ٣ن – ١ ، ن فردية ؛ ٢ن + ٢ ، ن زوجية }

٢١) متتابعة حسابية فيها $ع_{٦}$ = ١٦ ، $ع_{١٨}$ = – ٢٠ أوجد مجموع الحدود الموجبة منها

٢٢) إثبت أن $(ع_{ن})$ = (لو س ص$^{ن-١}$) متتابعة حسابية حيث س، ص $\in$ $ح_{+}$ ، إذا كان س = ١٦٠ ، ص = $\frac{1}{2}$ فأوجد مجموع التسعة حدود الأولى منها

المتتابعات الهندسية

الصورة العامة: (ا ، ا ر ، ا $ر^٢$ ، ... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

مثـــ١ـــال : بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة هندسية و أوجد اساسها

(١) $(ح_ن) = (٣ \times ٥^{ن-١})$ (٢) $(ح_ن) = (٣ + ٥^ن)$

الحـــــــــــل

(١) ∵ $ح_ن = ٣ \times ٥^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = ٣ \times ٥^{(ن+١)-١} = ٣ \times ٥^ن$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣ \times ٥^ن}{٣ \times ٥^{ن-١}} = ٥ =$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٣ \times ٥^{ن-١})$ متتابعة هندسية أساسها ر = ٥

(٢) ∵ $ح_ن = ٣ + ٥^ن$ ، $ح_{ن+١} = ٣ + ٥^{ن+١}$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣ + ٥^{ن+١}}{٣ + ٥^ن} \neq$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٣ + ٥^ن)$ ليست متتابعة هندسية

الحد العام : $(ح_ء) = ل = ا ر^{ن-١}$

أساس المتتابعة الهندسية: $ر = \frac{ح_ء}{ح_{ء-١}} = \frac{\text{أى حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثـــ٢ـــال : فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، . . .) أوجد $ح_٦$ ، $ح_{١٠}$

الحـــــــــــل

ا = ٦ ، ر = ١٢ ÷ ٦ = ٢

$ح_٦ = ا ر^٥ = ٦ \times (٢)^٥ = ١٩٢$ ، $ح_{١٠} = ا ر^٩ = ٦ \times (٢)^٩ = ٣٠٧٢$

مثـــ٣ـــال : متتابعة هندسية حدها الثالث = ١٢ ، حدها الثامن = ٣٨٤ أوجد المتتابعة

الحـــــــــــل

∵ $ح_٣ = ١٢$ ∴ $ا ر^٢ = ١٢$ (١) ، ∵ $ح_٨ = ٣٨٤$

∴ أ $ر^{٧}$ = ٣٨٤   (٢)

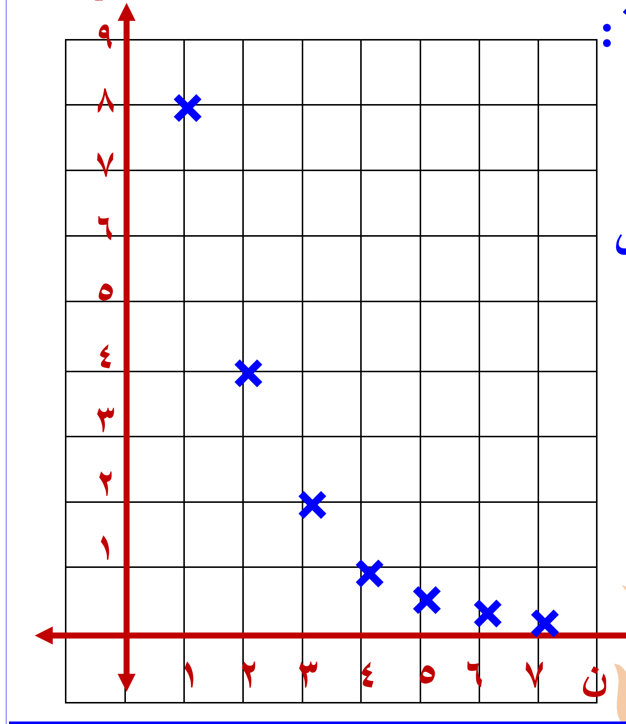
∴ بالقسمة : $\frac{أ ر^{٧}}{أ ر^{٢}} = \frac{٣٨٤}{١٢}$ ∴ $ر^{٥}$ = ٣٢ = $٢^{٥}$ ∴ ر = ٢

بالتعويض فى (١) ∴ أ = ٣   ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٠٠٠)

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية :

مثـ٤ـال: أوجد الحدود الخمسة من المتتابعة

(٨ ، ٤ ، ٢ ، ......) ثم مثل ٧ حدود بيانياً



الحـــــــل

أساس المتتابعة = $\frac{٤}{٨} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

المجال هو {١،٢،٣،٤،٥،٦،٧}

المدى هو { ٨، ٤، ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ }

❖ حدود المتتابعة تناقصية أ>٠ ، ٠<ر<١

❖ التمثيل البيان يتبع الدالة الأسية

مثـ٥ـال : متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى ٧٢ ، مجموع حديها الثالث والرابع ٨ أوجد المتتابعة

الحـــــــل

∵ $ع_{١} + ع_{٢}$ = ٧٢   ∴ أ + أ ر = ٧٢   ∴ أ (١ + ر) = ٧٢   (١)

، ∵ $ع_{٣} + ع_{٤}$ = ٨   ∴ أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ = ٨   ∴ أ $ر^{٢}$ (١ + ر) = ٨   (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج : $ر^{٢} = \frac{١}{٩}$ ∴ ر = ± $\frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١) :

عند ر = $\frac{١}{٣}$ ∴ أ (١ + $\frac{١}{٣}$) = ٧٢ ، منها أ = ٥٤

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ٠٠٠)

عند ر = − $\frac{١}{٣}$ ∴ أ (١ − $\frac{١}{٣}$) = ٧٢ ، منها أ = ١٠٨

∴ المتتابعة هى (١٠٨ ، − ٣٦ ، ١٢ ، ٠٠٠)

الوسط الهندسى

!) إذا كونت ٱ ، ب ، جـ متتابعة هندسية فإن ب تسمى الوسط الهندسى بين ٱ ، جـ

ويكون : $\frac{ٱ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ ∴ ب^{٢} = ٱ جـ ∴ ب = ± $\sqrt{ٱ جـ}$

!!) إذا كونت (ٱ ، ب ، جـ ، ... ، س ، ل) متتابعة هندسية

فإن ب ، جـ ، ... ، س تسمى أوساطاً هندسية بين ٱ ، ل

ويكون عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة ـ ٢

!!!) نظرية الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى .

فمثلاً : الوسط الهندسى للكميات ٢ ، ٤ ، ٩ ، ٣٦ ، ٣ ، ٦

= $\sqrt{٢ × ٤ × ٩ × ٣٦ × ٣ × ٦}$ = ٦

مثـــ١ـــال:عددان موجبان وسطهما الحسابى = ١٠،وسطهما الهندسى = ٨ أوجد العددين

الحـــــــــــل

نفرض أن العددين هما س ، ص

∵ الوسط الحسابى = ١٠ ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ١٠ ∴ س + ص = ٢٠ (١)

∵ الوسط الهندسى = ٨ ∴ $\sqrt{س ص}$ = ٨ ∴ س ص = ٦٤ (٢)

من (١) ينتج : ص = ٢٠ ــ س عوض فى (٢) ∴ س (٢٠ ــ س) = ٦٤

∴ س^{٢} ــ ٢٠ س + ٦٤ = ٠ ∴ (س – ٤)(س – ١٦) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = ١٦ ∴ ص = ١٦ أ، ص = ٤ ∴ العددان هما ٤ ، ١٦

مثـــ٢ـــال : إذا كانت س ــ ٢ ، ٢ س ــ ١ ، ٤ س + ٧ ثلاثة حدود من متتابعة هندسية فما قيمة س ؟

الحـــــــــــل

∵ س ــ ٢ ، ٢ س ــ ١ ، ٤ س + ٧ ثلاثة حدود من متتابعة هندسية

∴ ٢ س ــ ١ وسط هندسى بين س ــ ٢ ، ٤ س + ٧

∴ (٢ س – ١)^{٢} = (س – ٢)(٤ س + ٧)

∴ ٤س^{٢} – ٤س + ١ = ٤س^{٢} ــ س ــ ١٤ ∴ ٣ س = ١٥ ∴ س = ٥

مثـــ٣ـــال: إذا كانت س ، ص ، ع ، ل أربعة كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية

أثبت أن : س ص + س ل + ل ع > ٣ ص ع

الحـــــــــــل

ص وسط هندسى بين س ، ع ، الوسط الحسابى بين س ، ع هو $\frac{س + ع}{٢}$

∴ $\frac{س + ع}{٢}$ > ص   ∴ س + ع > ٢ ص   (١)

، ع وسط هندسى بين ص ، ل ، الوسط الحسابى بين ص ، ل هو $\frac{ص + ل}{٢}$

∴ $\frac{ص + ل}{٢}$ > ع   ∴ ص + ل > ٢ ع   (٢)

بضرب (١) × (٢) ينتج : (س + ع)(ص + ل) > ٤ ص ع

∴ س ص + س ل + ص ع + ل ع > ٤ ص ع

∴ س ص + س ل + ل ع > ٣ ص ع

مثـــ٤ـــال :أدخل ستة أوساط هندسية بين ١٣ ، ١٦٦٤

الحـــــــــــل

∵ عدد الأوساط = ٦   ∴ عدد حدود المتتابعة = ٦ + ٢ = ٨

∴ أ = ١٣ ، $ح_{٨}$ = ١٦٦٤

، ∵ $ح_{٨}$ = أ $ر^{٧}$ ∴ ١٣ $ر^{٧}$ = ١٦٦٤   ∴ $ر^{٧}$ = ١٢٨ = $٢^{٧}$

∴ ر = ٢   ∴ الأوساط هى : ٢٦ ، ٥٢ ، ١٠٤ ، ٢٠٨ ، ٤١٦ ، ٨٣٢

مثـــ٥ـــال : إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠ ، مجموع الوسطين الثانى والثالث يساوى ٦٠ أوجد العددين

الحـــــــــــل

∵ عدد الأوساط = ٤   ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٨

، بفرض أن العدد الأول = أ   ∴ العدد الثانى هو أ $ر^{٥}$

∴ الوسطين الأول والرابع هما $ح_{٢}$ ، $ح_{٥}$ ∴ $ح_{٢}$ + $ح_{٥}$ = ٩٠

∴ أ ر + أ $ر^{٤}$ = ٩٠   ∴ أ ر (١ + $ر^{٣}$) = ٩٠   (١)

، الوسطين الثانى و الثالث هما $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ ∴ $ح_{٣}$ + $ح_{٤}$ = ٦٠

∴ أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ = ٦٠   ∴ أ ر (١ + ر) ر = ٦٠   (٢)

∴ بقسمة (١) على (٢) ينتج : $\frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})}{ر (١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \text{٢ ر}^{٢} - \text{٢ ر} + ٢ = \text{٣ ر}$ $\therefore \text{٢ ر}^{٢} - \text{٥ ر} + ٢ = ٠$

$\therefore (\text{ر} - ٢)(\text{٢ ر} - ١) = ٠$ $\therefore \text{ر} = ٢$ أو $\text{ر} = \frac{١}{٢}$

بالتعويض فى (٢) عن $\text{ر} = ٢$ $\therefore \text{أ} = ٥$ $\therefore$ العددان هما ٥ ، ١٦٠

، بالتعويض فى (٢) عن $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \text{أ} = ١٦٠$ $\therefore$ العددان هما ١٦٠ ، ٥

مجموع المتسلسلة الهندسية

!) $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$ ويستخدم إذا عُلم أ ، ر ، ن

!!) $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}}$ ويستخدم إذا عُلم أ ، ر ، ل

مثــ١ـــال : أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، .....)

الحـــــــــــل

$\text{أ} = ٤$ ، $\text{ر} = \frac{١٢}{٤} = ٣$ ، $\text{ن} = ٦$

$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ $\therefore \text{جـ}_{٦} = \frac{٤(٣^{٦} - ١)}{٣ - ١} = ١٤٥٦$

مثــ٢ـــال : متتابعة هندسية حدها الأول ٢ ، حدها الأخير ٢٥٦ ، مجموع حدودها ٥١٠ ، أوجد هذه المتتابعة

الحـــــــــــل

$\text{أ} = ٢$ ، $\text{ل} = ٢٥٦$ ، $\text{جـ}_{\text{ن}} = ٥١٠$

$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١}$ $\therefore ٥١٠ = \frac{\text{٢٥٦ ر} - ٢}{\text{ر} - ١}$

$\therefore \text{٥١٠ ر} - ٥١٠ = \text{٢٥٦ ر} - ٢$ $\therefore \text{٥١٠ ر} - \text{٢٥٦ ر} = ٥١٠ - ٢$

$\therefore \text{٢٥٤ ر} = ٥٠٨$ $\therefore \text{ر} = ٢$

$\therefore$ المتتابعة هى (٢ ، ٤ ، ٨ ، .... ، ٢٥٦)

مثــ٣ـــال : كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ......) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٢٠٤٦ ؟

الحـــــــل

أ = ٢ ، ر = ٢ ، حـ ن = ٢٠٤٦

∵ $حـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ∴ $٢٠٤٦ = \frac{٢(٢^ن - ١)}{٢ - ١}$

∴ $١٠٢٣ = ٢^ن - ١$ ∴ $٢^ن = ١٠٢٤ = ٢^{١٠}$ ∴ ن = ١٠

مثــ٤ـــال : متتابعة هندسية حدودها موجبة ،حدها الثانى ٦ حدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ أوجد مجموع ١٢ حداً الأولى منها

الحـــــــل

∵ $ع_٢ = ٦$ ∴ أ ر = ٦ (١)

، ∵ $ع_٣ - ع_١ = ٩$ ∴ $أ ر^٢ - أ = ٩$ ∴ $أ(ر^٢ - ١) = ٩$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج :

$\frac{ر^٢ - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $٢ ر^٢ - ٢ = ٣ ر$

∴ $٢ ر^٢ - ٣ ر - ٢ = ٠$ ∴ $(ر - ٢)(٢ ر + ١) = ٠$

∴ ر = ٢ أو ر = $-\frac{١}{٢}$ مرفوض

بالتعويض فى (١) نجد أن : أ × ٢ = ٦ ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

لإيجاد مجموع ١٢ حداً الأولى منها

$حـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ∴ $حـ_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية

$حـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\text{الحد الأول}}{\text{١ - الأساس}}$ حيث | ر | < ١

مثـــ٥ـــال : بين أى المتتابعات الهندسية الآتية يمكن إيجاد مجموع حدودها إلى ∞ ، أوجد هذا المجموع إن أمكن ؟

(١) (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) (٢) (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

(٣) (ع$_ن$) = (٢ × ٣ $^{١ - ن}$) (٤) (ع$_ن$) = (٢ × (– ٣) $^{١ - ن}$)

الحـــــــل

(١) ر = $\frac{٢٧}{٨١}$ = $\frac{١}{٣}$ ، ∵ | $\frac{١}{٣}$ | < ١ ∴ يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞

$$ح_∞ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٧}{١ - \frac{١}{٣}} = ٨١ × \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤} ٦٠$$

(٢) ر = $\frac{٢}{١}$ = ٢ ، ∵ | ٢ | > ١ ∴ لا يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞

(٣) ∵ ع$_ن$ = ٢ × ٣ $^{١ - ن}$ ∴ ع$_{ن + ١}$ = ٢ × ٣ $^{– ن}$

$$∴ \frac{ح_{ن + ١}}{ح_ن} = \frac{٢ × ٣^{-ن}}{٢ × ٣^{١-ن}} = ٣^{- ن - ١ + ن} = ٣^{– ١} = \frac{١}{٣}$$

، ∵ | $\frac{١}{٣}$ | < ١ ∴ يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞ ، يكون : ع$_١$ = أ = ٢

$$ح_∞ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٣}} = ٢ × \frac{٣}{٢} = ٣$$

(٤) ∵ ع$_ن$ = ٢ × (– ٣) $^{١ - ن}$ ∴ ع$_{ن + ١}$ = ٢ × (– ٣) ^{ن}

$$∴ \frac{ح_{ن + ١}}{ح_ن} = \frac{٢ × (– ٣)^{ن}}{٢ × (– ٣)^{١ - ن}} = (– ٣)^{ن – ن + ١} = – ٣$$

، ∵ | – ٣ | > ١ ∴ يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞

مثـــ٦ـــال : متتابعة هندسية فيها ع$_٢$ = ٢٤٠ ، ع$_٥$ = ٣٠ أوجد المتتابعة وأوجد مجموع عدد غير منته من حدودها

الحـــــــل

∵ ع$_٢$ = ٢٤٠ ∴ أ ر = ٢٤٠ (١) ، ∵ ع$_٥$ = ٣٠

∴ أ ر^٤ = ٣٠ (٢) بقسمة (٢) على (١) ينتج :

$\frac{\text{أ}\,\text{ر}^{٤}}{\text{أ}\,\text{ر}} = \frac{٣٠}{٢٤٠}$ ∴ $\text{ر}^{٣} = \frac{١}{٨}$ ∴ $\text{ر} = \frac{١}{٢}$

بالتعويض فى (١) ينتج : $\text{أ} \times \frac{١}{٢} = ٢٤٠$ ∴ أ = ٤٨٠

∴ المتتابعة هى : (٤٨٠ ، ٢٤٠ ، ١٢٠ ، ٠٠٠٠٠)

$$∴ \text{ح}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} = \frac{٤٨٠}{١ - \frac{١}{٢}} = ٩٦٠$$

مثـــ٧ـــــال متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ٩ وحدها السادس يساوى ٢٤٣
أوجد المتتابعة ومجموع الستة حدود الأولى منها .

الحــــــــــل

$\text{أ}\,\text{ر}^{٢} = ٩$ ... (١) ، $\text{أ}\,\text{ر}^{٥} = ٢٤٣$ ... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ $\text{ر}^{٣} = ٢٧$ ∴ ر = ٣

نعوض فى (١) ∴ أ × ٩ = ٩ ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هى (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

$$∵ \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \quad ∴ \text{جـ}_{٦} = \frac{١(٣^{٦} - ١)}{٣ - ١} = \frac{٧٢٩ - ١}{٢} = ٣٦٤$$

مثـــ٨ـــال: ($\text{ح}_{\text{ن}}$) متتابعة هندسية فيها $\text{ح}_{٥} = ٨\,\text{ح}_{٢}$ ، $\text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦} = ٢٤٠$
أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى منها .

الحــــــــــل

$\text{أ}\,\text{ر}^{٤} = ٨\,\text{أ}\,\text{ر}$ ∴ $\text{ر}^{٣} = ٨$ ∴ ر = ٢

$\text{أ}\,\text{ر}^{٣} + \text{أ}\,\text{ر}^{٥} = ٢٤٠$ ∴ ٨ أ + ٣٢ أ = ٢٤٠

∴ ٤٠ أ = ٢٤٠ ∴ أ = ٦

∴ المتتابعة هى (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

$$∵ \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \quad ∴ \text{جـ}_{١٥} = \frac{٦(٢^{١٥} - ١)}{٢ - ١} = ١٩٦٦٠٢$$

مثـــ٩ـــال: متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الثانى ٦ ، وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ . أوجد مجموع ١٢ حداً الأولى منها

الحـــــــــل

أ ر = ٦ ... (١)

أ ر^{٢} − أ = ٩ ∴ أ (ر^{٢} − ١) = ٩ ... (٢)

بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{ر}{ر^{٢} - ١}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ٢ ر^{٢} − ٢ = ٣ ر ∴ ٢ ر^{٢} − ٣ ر − ٢ = ٠

∴ (٢ ر + ١) (ر − ٢) = ٠

إما ر = − $\frac{١}{٢}$ وهو مرفوض لأن الحدود موجبة

أو ر = ٢ نعوض فى (١) ∴ ٢ أ = ٦ ∴ أ = ٣

∵ جـ$_{ن}$ = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ جـ$_{١٢}$ = $\frac{٣ (٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١}$ = ١٢٢٨٥

مثـــ١٠ـــال: كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٢٠٤٦ .

الحـــــــــل

∵ أ = ٢ ، ر = ٢

∵ جـ$_{ن}$ = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ ٢٠٤٦ = $\frac{٢ (٢^{ن} - ١)}{٢ - ١}$

∴ = $\frac{٢٠٤٦}{٢}$ = ٢^{ن} − ١ ∴ ١٠٢٣ = ٢^{ن} − ١

∴ ٢^{ن} = ١٠٢٤ = ٢^{ن} ∴ ن = ١٠

مثـــ١١ـــال: فى المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ١٢٢٨٨) أوجد(أولاً) رتبة الحد

الحـــــــــل

∵ أ = ٣ ، ر = ٢ ، ل = ١٢٢٨٨

(أولاً) ∵ ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$ ∴ ٧٦٨ = ٣ × ٢$^{ن-١}$ بالقسمة على ٣

∴ ٢٥٦ = ٢$^{ن-١}$ ∴ ٢^{٨} = ٢$^{ن-١}$ ∴ ن − ١ = ٨

∴ ن = ٩ ∴ ح٩ = ٧٦٨

(ثانياً) ∵ ل = أ ر^ن-١ ∴ ١٢٢٨٨ = ٣ × ٢^ن-١

∴ ٢^ن-١ = ١٢٢٨٨ / ٣ = ٤٠٩٦ = (٢)^١٢ ∴ ن – ١ = ١٢

∴ ن = ١٣ وهو عدد الحدود

مثـــ١٢ـــال: مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ٢٦ ومجموع الثلاثة حدود التالية لها يساوى ٧٠٢ . أوجد المتتابعة .

الحـــــــــــــل

∵ ح١ + ح٢ + ح٣ = أ + أ ر + أ ر^٢ = ٢٦

∴ أ (١ + ر + ر^٢) = ٢٦ ... (١)

أ ر^٣ + أ ر^٤ + أ ر^٥ = ٧٠٢ ∴ أ ر^٣ (١ + ر + ر^٢) = ٧٠٢ ... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ ر^٣ = ٢٧ ∴ ر = ٣

نعوض فى (١) ∴ أ × (١ + ٣ + ٩) = ٢٦

∴ ١٣ أ = ٢٦ ∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

مثـــ١٣ـــال: (حن) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان ح٣+ح٤ = ٦ ح٢ ، ح٧ = ٣٢٠ . أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى .

الحـــــــــــــل

∵ ح٣+ح٤ = ٦ ح٢ ∴ أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٦ ر أ بالقسمة على ر أ

∴ ر + ر^٢ = ٦ ∴ ر^٢ + ر – ٦ = ٠ ∴ (ر + ٣) (ر – ٢) = ٠

إما ر + ٣ = ٠ ومنها ر = -٣ وهذا مرفوض

أ، ر – ٢ = ٠ ومنها ر = ٢

∵ ح٧ = أ ر^٦ = ٣٢٠ ∴ ٦٤ أ = ٣٢٠ ∴ أ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

∵ جن = أ(ر^ن – ١) / (ر – ١) ∴ ج٨ = ٥(٢^٨ – ١) / (٢ – ١) = ١٢٧٥

مثــ١٤ــال: متتابعة هندسية فيها أ = ٣ ، ل = ٣٠٧٢ ، حدها الرابع من النهاية يساوى ــ ٣٨٤ . أوجد مجموع حدود هذه المتتابعة .

الحـــل

$\frac{ل}{ر^{٣}} = -٣٨٤$ ∴ ل = ــ ٣٨٤ $ر^{٣}$ ∴ ٣٠٧٢ = ــ ٣٨٤ $ر^{٣}$

∴ $ر^{٣} = -٨$ ∴ ر = ــ ٢

∴ $جـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = \frac{٣ - ٣٠٧٢ \times (-٢)}{١ - (-٢)} = \frac{٦١٤٧}{٣} = ٢٠٤٩$

مثــ١٥ــال: متتابعة هندسية فيها $ح_{ن} = ٢ \times ٣^{ن-١}$ أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها .

الحـــل

نضع ن = ١ ∴ $ح_{١} = ٢ \times ٣^{صفر} = ٢ \times ١ = ٢$

نضع ن = ٢ ∴ $ح_{٢} = ٢ \times ٣^{١} = ٦$

∴ أ = ٢ ، $ر = \frac{٦}{٢} = ٣$

∴ $جـ_{٦} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \frac{٢(٣^{٦} - ١)}{٣ - ١} = ٧٢٨$

مثــ١٦ــال : متتابعة هندسية فيها $ح_{٢} = ٥$ ، $\frac{ح_{٧}}{ح_{٤}} = \frac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة ، وبين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها ثم أوجد هذا المجموع .

الحـــل

∵ $ح_{٢} = أ ر = ٥$ ... (١) ، ∵ $\frac{ح_{٧}}{ح_{٤}} = \frac{أ ر^{٦}}{أ ر^{٣}} = ر^{٣} = \frac{١}{٢٧}$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$ نعوض فى (١)

∴ $أ \times \frac{١}{٣} = ٥$ ∴ أ = ١٥

∴ المتتابعة هى (١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...)

∵ | ر | < ١ ∴ يمكن جمع عدد غير منته من حدود المتتابعة

$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٥}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١٥}{\frac{٢}{٣}} = ١٥ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٤٥}{٢}$

مثـــال ١٧: مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ وحدها الثانى يساوى – ٣ أوجد المتتابعة .

الحـــــــــل

∴ $ج_{\infty} = \frac{أ}{1 - ر} = 4$ ... (١)

∵ $ح_2 = ر أ = -3$ ... (٢) بقسمة (٢) على (١)

∴ $ر أ \times \frac{1 - ر}{أ} = \frac{-3}{4}$ ∴ $ر - ر^2 = \frac{-3}{4}$

∴ $4ر - 4ر^2 = -3$ ∴ $4ر^2 - 4ر - 3 = 0$

∴ $(2ر + 1)(2ر - 3) = 0$

إما $2ر - 3 = 0$ ومنها $ر = \frac{3}{2}$ وهذا مرفوض لأن $|ر| > 1$

أ، $2ر + 1 = 0$ ومنها $ر = \frac{-1}{2}$

نعوض فى (٢) ∴ $\frac{-1}{2} أ = -3$ ∴ $أ = 6$

∴ المتتابعة هى $(6 ، -3 ، \frac{3}{2} ، ...)$

مثـــال ١٨: إذا كان مجموع حدود متتابعة هندسية لانهائية ١٥ ومجموع مربعات هذه الحدود ٤٥ فما هى المتتابعة ؟

الحـــــــــل

المتتابعة هى $(أ ، أ ر ، أ ر^2 ، ...)$ ∴ $ج_{\infty} = \frac{أ}{1 - ر} = 15$ ... (١)

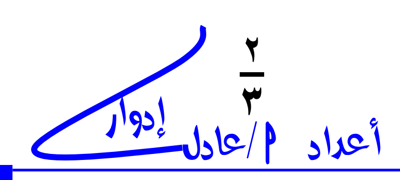
المتتابعة التى حدودها مربعات حدود المتتابعة السابقة $(أ^2 ، أ^2 ر^2 ، أ^2 ر^4 ، ...)$

∴ $ج_{\infty} = \frac{أ^2}{1 - ر^2} = 45$ ... (٢) بتربيع (١) وقسمتها على (٢)

∴ $\frac{أ^2}{(1 - ر)^2} \times \frac{1 - ر^2}{أ^2} = \frac{225}{45}$

∴ $\frac{(1 - ر)(1 + ر)}{(1 - ر)^2} = \frac{1 + ر}{1 - ر} = 5$

$\frac{2}{3}$



∴ ١ + ر = ٥ ـ ٥ ر ∴ ٦ ر = ٤ ∴ ر =

نعوض فى (١) ∴ أ = ١٥ (١ - $\frac{٢}{٣}$) = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٩}$ ، ...)

مثـــال ١٩: أدخل ٥ أوساط هندسية بين ٣ ، ١٩٢

الحــــــــــل

∵ أ = ٣ ، ل = ١٩٢ ، ن = ٧

∵ ل = أ $ر^{ن-١}$ ∴ ١٩٢ = ٣ $ر^{٦}$ ∴ $ر^{٦}$ = ٦٤

∴ $ر^{٦}$ = $(\pm ٢)^{٦}$ ∴ ر = ± ٢

عندما ر = ٢ ∴ الأوساط هى (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦)

وعندما ر = ـ ٢ ∴ الأوساط هى (ـ ٦ ، ١٢ ، ـ ٢٤ ، ٤٨ ، ـ ٩٦)

∴ الأوساط هى (± ٦ ، ١٢ ، ± ٢٤ ، ٤٨ ، ± ٩٦)

مثـــال ٢٠: إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ١٦ فما عدد تلك الأوساط ؟

الحــــــــــل

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٣ر ، ٣$ر^{٢}$ ، ... ، $\frac{٣٨٤}{ر^{٢}}$ ، $\frac{٣٨٤}{ر}$ ، ٣٨٤)

∴ $\frac{٣ر^{٣} + ر^{٤}}{\frac{٣٨٤}{ر} + \frac{٣٨٤}{ر^{٢}}} = \frac{١}{١٦}$ بالضرب × $ر^{٢}$ بسطاً ومقاماً

∴ $\frac{٣ر^{٣} + ر^{٤}}{٣٨٤ر + ٣٨٤} = \frac{٣ر^{٣}(١ + ر)}{٣٨٤(ر + ١)} = \frac{ر^{٣}}{١٢٨} = \frac{١}{١٦}$

∴ ١٦$ر^{٣}$ = ١٢٨ ∴ $ر^{٣}$ = ٨ ∴ ر = ٢

∵ ل = أ $ر^{ن-١}$ ∴ ٣٨٤ = ٣ × $٢^{ن-١}$ ∴ $٢^{ن-١}$ = ١٢٨

∴ $٢^{ن-١}$ = $(٢)^{٧}$ ∴ ن ـ ١ = ٧ ∴ ن = ٨ ∴ عدد الأوساط = ٦

مثـــال ٢١: إذا كانت ٢س ، ٤ص ، ٣ع ، ٣ل كميات موجبة فى تتابع حسابى

فأثبت أن ٨ ص^{٢} + ٣ع^{٢} > ٣س ع + ٤ ص ل

الحـــــــل

∵ ٢س ، ٤ ص ، ٣ع فى تتابع حسابى

∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ ٤ص > $\sqrt{\text{٦س ع}}$

∴ ١٦ ص^{٢} > ٦ س ع ∴ ٨ص^{٢} > ٣ س ع ... (١)

∵ ٤ص ، ٣ع ، ٣ل فى تتابع حسابى

∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ ٣ع > $\sqrt{\text{١٢ص ل}}$

∴ ٩ع^{٢} > ١٢ ص ل ∴ ٣ع^{٢} > ٤ص ل ... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ٨ ص^{٢} + ٣ع^{٢} > ٣س ع + ٤ ص ل

مثـــال ٢٢: متتابعة هندسية متزايدة جميع حدودها موجبة ، إذا كان الوسط الحسابى لحديها الثانى والرابع يساوى ٦٨ والوسط الهندسى الموجب لهما يساوى ٣٢ أوجد المتتابعة .

الحـــــــل

الوسط الحسابى = $\frac{\text{أ ر + أ ر}^{٣}}{٢}$ = ٦٨ ∴ أ ر (١ + ر^{٢}) = ١٣٦ ... (١)

الوسط الهندسى = $\sqrt{\text{أر × أ ر}^{٣}}$ = ٣٢ ∴ أ ر^{٢} = ٣٢ ... (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{\text{أر (١ + ر}^{٢}\text{)}}{\text{أ ر}^{٢}}$ = $\frac{\text{١ + ر}^{٢}}{\text{ر}}$ = $\frac{١٧}{٤}$ ∴ ٤ ر^{٢} + ٤ = ١٧ ر

∴ ٤ ر^{٢} − ١٧ر + ٤ = ٠ ∴ (٤ر − ١) (ر − ٤) = ٠

إما ٤ر − ١ = ٠ ومنها ر = $\frac{١}{٤}$ " مرفوض لأن المتتابعة متزايدة "

أ، ر − ٤ = ٠ ومنها ر = ٤ نعوض فى (٢) ∴ ١٦ أ = ٣٢

∴ أ = ٢ ∴ المتتابعة هى (٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ...)

مثـــ٢٣ـــال: متتابعة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها ٤٥ وحدودها الأول والثانى والرابع فى تتابع هندسي ، أوجد المتتابعة الحسابية .

الحــــــــــل

∵ جـ~ن~ = ن/٢ [٢أ + (ن – ١) ء]

∴ جـ~٥~ = ٥/٢ (٢أ + ٤ء) = ٤٥ ∴ ٥/٢ × ٢ (أ + ٢ء) = ٤٥

∴ أ + ٢ء = ٩ ... (١)

∵ ح~١~ ، ح~٢~ ، ح~٤~ فى تتابع هندسى أ ، أ + ء ، أ + ٣ء

∴ (أ + ء)^٢^ = أ (أ + ٣ء)

∴ أ^٢^ + ٢أء + ء^٢^ = أ^٢^ + ٣أء ∴ ء^٢^ – أء = ٠ بالقسمة على ء

∴ ء – أ = ٠ ∴ ء = أ ... (٢)

نعوض من (٢) فى (١) ∴ أ + ٢أ = ٩ ∴ ٣أ = ٩

∴ أ = ٣ ، ء = ٣ ∴ المتتابعة الحسابية هى (٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)

مثـــ٢٤ـــال: ثلاثة أعداد موجبة فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا ضُرب أصغرها فى ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧ كونت الأعداد الناتجة متتابعة هندسية أوجد حدود المتتابعة الحسابية .

الحــــــــــل

نفرض أن الأعداد هى أ – ء ، أ ، أ + ء

∴ ٣أ = ١٥ ∴ أ = ٥ ∴ الأعداد هى ٥ – ء ، ٥ ، ٥ + ء

إذا ضُرب أصغرها فى ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧

∴ ١٠ – ٢ء ، ١٢ ، ٢٢ + ء فى تتابع هندسى

∴ ١٤٤ = (١٠ – ٢ء) (٢٢ + ء) = ٢٢٠ – ٣٤ء – ٢ء^٢^

∴ ٢ء^٢^ + ٣٤ء – ٧٦ = ٠ ∴ ء^٢^ + ١٧ء – ٣٨ = ٠

∴ (ء + ١٩) (ء – ٢) = ٠

إما ء = ـ ١٩ وهذا مرفوض لأن الأعداد موجبة

أ، ء = ٢ ∴ المتتابعة الحسابية هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

الكسر العشرى الدائرى

لتحويل الكسر الإعتيادى $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشرى نجرى عملية القسمة ونلاحظ :

أن عملية القسمة لا تنتهى و أن الرقم ٣ فى خارج القسمة يظل متكرراً أى أن :

$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٠٠٠٠ لذا نختصر هذا الناتج بأن نكتب :

$\frac{١}{٣} = ٠.\dot{٣}$ وذلك بوضع نقطة فوق العدد ٣ الذى يتكرر وتقرأ ٠.٣ دائر

بالمثل : $\frac{١}{٦}$ = ٠,١٦٦٦٦٠٠٠٠ = $٠.١\dot{٦}$ ، $\frac{٥}{٩}$ = ٠,٥٥٥٥٠٠٠٠٠ = $٠.\dot{٥}$

$\frac{٥}{٣٣}$ = ٠.١٥١٥٠٠٠٠٠ = $٠.\dot{١}\dot{٥}$ ، $\frac{١٣٤}{٩٩٩}$ = ٠,١٣٤١٣٤٠٠٠٠٠ = $٠.\dot{١}٣\dot{٤}$

ويلاحظ : أن وضع النقط فوق الرقم معناه إستمرار تكرار هذا الرقم أى أن هذا الرقم دائر ، إذا كانت النقط على رقمين متتالين فمعناه أن إستمرار تكرار هذين الرقمين أى أنهما دائرين، إذا كانت النقط على رقمين ويحصران بينهما رقم ثالث فمعناه أن إستمرار تكرار الأرقام الثلاثة

و إذا كان العكس هو المطلوب أى تحويل الكسر العشرى الدائر إلى كسر إعتيادى فإننا نضع الكسر العشرى الدائر فى صورة مجموع حدود متتابعة هندسية غير منتهية كالآتى : $٠.\dot{٣}$ = ٠,٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣

= ٠.٣ + ٠.٠٣ + ٠.٠٠٣ + ٠.٠٠٠٣ + ٠٠٠٠٠

$٠.١\dot{٧}$ = ٠,١٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧

= ٠.١ + (٠.٠٧ + ٠.٠٠٧ + ٠.٠٠٠٠٧ + ٠٠٠٠٠)

$٠.\dot{٨}\dot{٦}$ = ٠,٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦

= ٠.٨٦ + ٠.٠٠٨٦ + ٠.٠٠٠٠٠٨٦ + ٠٠٠٠٠

$٠.\dot{٤}١\dot{٥}$ = ٠,٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥

= ٠.٤١٥ + ٠.٠٠٠٤١٥ + ٠.٠٠٠٠٠٠٠٤١٥ + ٠٠٠٠٠

مثـــ٤١ـــال: حول الكسور العشرية الدائرية الآتية إلى كسور اعتيادية فى أبسط صورة

(أولاً) $٠.\dot{٧}$ (ثانياً) $٠.\dot{٤}\dot{٨}$ (ثالثاً) $٠.\dot{٤}٧\dot{١}$ (رابعاً) $٢.٥\dot{٤}\dot{٣}$

الحــــــــــل

(أولاً) $٠.\dot{٧} = ٠,٧٧٧٧٧٧٧٧٧$

$= ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ...$ م. هـ إلى ∞

أ $= ٠.٧$ ، ر $= ٠,١$ جـ $= \frac{٠,٧}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٧}{٠,٩} = \frac{٧}{٩}$

(ثانياً) $٠.\dot{٤}\dot{٨} = ٠,٤٨٤٨٤٨٤٨٤٨...$

$= ٠.٤٨ + ٠,٠٠٤٨ + ٠,٠٠٠٠٤٨ + ...$ م. هـ إلى ∞

أ $= ٠.٤٨$ ، ر $= ٠,٠١$ ∴ جـ $= \frac{٠,٤٨}{١ - ٠,٠١} = \frac{٠,٤٨}{٠,٩٩} = \frac{٤٨}{٩٩} = \frac{١٦}{٣٣}$

(ثالثاً) $٠.\dot{٤}٧\dot{١} = ٠,٤٧١٤٧١٤٧١...$

$= ٠.٤٧١ + ٠,٠٠٠٤٧١ + ٠,٠٠٠٠٠٠٤٧١ + ...$ م. هـ إلى ∞

أ $= ٠,٤٧١$ ، ر $= ٠,٠٠١$ ∴ جـ $= \frac{٠,٤٧١}{١ - ٠,٠٠١} = \frac{٠,٤٧١}{٠,٩٩٩} = \frac{١٥٧}{٣٣٣}$

(رابعاً) $٢.٥\dot{٤}\dot{٣} = ٢,٥٤٣٤٣٤٣٤٣٤٣...$

$= ٢,٥ + ٠,٠٤٣ + ٠,٠٠٠٤٣ + ٠,٠٠٠٠٠٤٣ + ...$ م. هـ إلى ∞

أ $= ٠,٠٤٣$ ، ر $= ٠,٠١$ ∴ جـ $= ٢,٥ + \frac{٠,٠٤٣}{١ - ٠,٠١} = ٢,٥ + \frac{٠,٠٤٣}{٠,٩٩}$

$= \frac{٥}{٢} + \frac{٤٣}{٩٩} = \frac{١٢٥٩}{٤٩٥}$

تمارين على المتتابعة الهندسية

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) فى المتتابعة (س ، س ص ، س ص^{٢} ، ...) حيث | ص | < ١ فإن $جـ_\infty$ = ...

(أ) $\frac{س}{١ - ص}$ (ب) $\frac{ص}{١ - س}$ (جـ) $\frac{س}{ص + ١}$ (د) $\frac{س}{ص - ١}$

(٢) متتابعة هندسية ٥ $ع_٤$ ـ ٧ $ع_٥$ = صفر فإن أساسها = ...

(أ) ٢ (ب) ـ٢ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٧}$

(٣) $جـ_\infty$ من المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ....) = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ـ١٦

(٤) متتابعة هندسية فيها أ = ٣ ، ر = ٢ فإن حدها الخامس = ...

(أ) ٤٨ (ب) ١٦٢ (جـ) ٩٦ (د) ١٢٨

(٥) المتتابعة ($ع_ن$) = ... هندسية

(أ) ٥ن + ٣ (ب) (٥)^{٣} + ن (جـ) ٥ + ٣^{ن} (د) ٥ + ن^{٣}

(٦) مجموع عدد غير منتهه من حدود المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....)

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٠

(٧) إذا كان مجموع عدد غير منتهه من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٧}{٨}$

(٨) إذا كان مجموع عدد غير منتهه من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$ هو ١٣$\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٩) متتابعة هندسية مجموع ن حداً الأولى منها يعطى بالعلاقة $حـ_ن$ = (٢)$^{ن+١}$ ـ ٤ فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(١٠) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية لإلى مالانهاية فإن ر=..

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

١) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ = (٢ ن − ١) متتابعة هندسية ثم أوجد حدها العاشر

٢) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_{ن+١} = \frac{١}{٢} ع_ن$ متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الخامس حيث $ع_١ = ٣$

٣) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ = (١، ٣، ٩، ٢٧، ......) متتابعة هندسية ثم أوجد حدها السادس

٤) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ = (٢ ، − ٤ ، ٨ ، − ١٦، ......) متتابعة هندسية ثم أوجد حدها السابع

٥) متتابعة هندسية فيها $ع_٢ = ٦$، $ع_٥ = ١٦٢$ أوجد المتتابعة ، رتبة الحد الذى قيمته ١٤٥٨ ، مجموع الستة حدود الأولى منها

٦) متتابعة هندسية فيها $ع_٣ = ٩$، $ع_٦ = ٢٤٣$ أوجد المتتابعة ، رتبة الحد الذى قيمته ٦٥٦١ ، مجموع الستة حدود الأولى منها

٧) متتابعة هندسية حدها الثاني ٢٤، حدها الخامس ٣ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها

٨) متتابعة هندسية حدها الرابع ١٦، حدها السابع ١ أوجد مجموع حدودها إلي مالانهاية

٩) متتابعة هندسية فيها $ع_٢ = ٥$، $ع_٤ = ٢٧ ع_٧$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها

١٠) متتابعة هندسية فيها $ع_٥ = ٨ ع_٢$ ، $ع_٤ + ع_٦ = ٢٤٠$ أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

١١) كم حدا يلزم أخذها من حدود المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤، ٨، ......) بدءا من الحد الأول ليكون المجموع ٢٥٤ ، ما رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨

١٢) كم حدا يلزم أخذها من حدود المتتابعة الهندسية (١، ٣، ٩، ......) بدءا من حدها الثانى ليكون المجموع ٣٦٣ ثم أوجد حدها التاسع

١٣) مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ ، حدها الثانى يساوى −٣ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

١٤) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الثانى يساوى $\frac{٢}{٣}$ ، مجموع حدودها يساوى ٨ أوجد المتابعة و رتبة الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤}$

١٥) أوجد $١ + \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٩} + \dots\dots\dots \infty$

١٦) إذا كان $س + ١٢ + ٩ + \dots\dots\dots \infty = ٦٤$ أوجد قيمة س

١٧) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_١ + ع_٢ = ٧٢$ ، $ع_٣ + ع_٤ = ٨$ أوجد المتتابعة

١٨) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_١ + ع_٣ = ٢٠$ ، $ع_٢ + ع_٤ = ٤٠$ أوجد المتتابعة

١٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ع_٢ = ٦$ ، $ع_٣ - ع_١ = ٩$ أوجد المتتابعة

٢٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة حدها الرابع يزيد عن حدها الأول بمقدار ٢١ ، حدها الأول ينقص عن حدها الثانى بمقدار ٣ أوجد المتتابعة

٢١) الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٢ ، حدها الأخير يساوى ٤٨٦ ، مجموع حدودها يساوى ٧٢٨ أوجد المتتابعة ، عدد حدودها

٢٢) الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٣ ، حدها الأخير يساوى ١٩٢ ، مجموع حدودها يساوى ٣٨١ أوجد المتتابعة ، عدد حدودها

٢٣) $(ع_ن)$ متتابعة فيها $ع_٢ = ٥$ ، $٢ ع_{ن+١} = ع_ن$ إثبت أنها متتابعة هندسية وأنه يمكن جمع حدودها إلى مالا نهاية وأوجد ذلك المجموع

٢٤) إذا كان $ح_ن$ من متتابعة يعطى بالعلاقة $ح_ن = \frac{٥}{٢}(١ - ٣^{ن})$ إثبت أنها متتابعة هندسية وأوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

٢٥) إذا كان $ع_ن = ٢٤٣ \times (-٣)^{-ن}$ فإثبت أن $(ع_ن)$ متتابعة هندسية واوجد مجموع الخمسة حدود الأولى منها

٢٦) إذا كان مجموع ن حدا الأولى من متتابعة هندسية يعطى

بالقانون $ح_ن = ١٢٨ - (٢)^{٧-ن}$ أوجد المتتابعة

٢٧) متتابعة هندسية حدها الرابع ٤ ، حدها الأخير ٦٤ فإذا كانت النسبة بين مجموع ن من حدودها إلى مجموع ن من مقلوبات هذه الحدود كنسبة ٣٢ : ١ أوجد المتتابعة

٢٨) متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى مالانهاية يساوى ٤ ؛ مجموع مكعبات حدودها إلى مالانهاية يساوى ١٩٢ أوجد المتتابعة

٢٩) أوجد مجموع ن حداً من المتتابعة (١٠ ، ٥ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، ......) ثم أوجد مجموع هذه المتتابعة إلى ∞ ، إذا كان : $ح_{\infty} - ح_ن = ٥ \times ٢^{-١٠}$ أوجد قيمة ن

مشتقة حاصل ضرب دالتين

(٥) المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للإشتقاق =

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = د (س) × ر (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = د′ (س) × ر (س) + ر′ (س) × د (س)

****

مثـــ١ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = (٢س- ١)(٣س+٥) (!!) ص = (س ^٢^ +٧)(س ^٣^ – ١)

الحـــــــل

(!) ص′ = ٢(٣س+٥) + ٣ (٢س- ١) = ٦س + ١٠ + ٦س ـ ٣ = ١٢س + ٧

(!!) ص′ = ٢س(س ^٣^ -١)+٣س ^٢^ (س ^٢^ +٧) = ٢س ^٤^ ـ ٢س + ٣س ^٤^ + ٢١س ^٢^

= ٥ س ^٤^ + ٢١ س ^٢^ ـ ٢ س

****

مثـــ٢ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = (٢س ^٣^ +٥)(س ^٤^ +١) (!!) ص = س ^٥^ (٣س ^٢^ +٨)

الحـــــــل

(!) ص′ =٦س ^٢^ (س ^٤^ +١)+٤س ^٣^ (٢س ^٣^ +٥)

= ٦س ^٦^ + ٦س ^٢^ + ٨س ^٦^ + ٢٠س ^٣^ = ١٤ س ^٦^ + ٢٠ س ^٣^ + ٦ س ^٢^

(!!) ص′ =٥س ^٤^ (٣س ^٢^ +٨)+٦س×س ^٥^ = ١٥ س ^٥^ + ٤٠ س ^٤^ + ٦ س ^٦^

****

مثـــ٣ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!!) ص = (س ^٢^ +١)(س ^٢^ -٣س+٥) (!!) ص = س ^٥^ (س + $\frac{١}{س}$)

الحـــــــل

(!) ص/ = ٢س (س^{٢} – ٣ س +٥) + (٢س-٣)(س^{٢}+١)

= ٢س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ١٠ س + ٢س^{٣} + ٢س ـ ٣س^{٢} ـ ٣

= ٤س^{٣} ـ ٩س^{٢} + ١٠س ـ ٣

(!!) ص = س^{٥} (س + س$^{-١}$)

∴ ص/ = ٥س^{٤} (س + س$^{-١}$) + (١ ـ س$^{-٢}$)× س^{٥}

= ٥س^{٥} + ٥ س^{٣} + س^{٥} ـ س^{٣} = ٦ س^{٥} + ٤ س^{٣}

****

مثــ٤ــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = س^{٦} (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) (!!) ص = س^{٣} (س ـ $\sqrt{س}$)

الحــــــل

(!) ص = س^{٦} (س^{٢} + س$^{-٢}$) = س^{٨} + س^{٤}

∴ $\frac{وص}{وس}$ = ٨ س^{٧} + ٤ س^{٣}

(!!) ص= س^{٣} (س - س$^{\frac{١}{٢}}$) = س^{٤} ـ س$^{\frac{٧}{٢}}$

∴ $\frac{وص}{وس}$ = ٤ س^{٣} ـ $\frac{٧}{٢}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$

****

نتيجة :- مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال

= مشتقة الاولى × الثانية × الثالثة + مشتقة الثانية × الاولى × الثالثة

+ مشتقة الثالثة × الاولى × الثانية

إذا كانت ص = د × ر × ى فان

∴ $\frac{وص}{وس}$ = د/ × ر × ى + ر/ × د × ى + ى/ × د × ر

****

مثــ٥ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة : د (س) =(٢س+٥) (س^{٢}+١) (س^{٣} – ٢)

الحــــــل

د/(س) = ٢ (س^{٢} +١) (س^{٣} – ٢) + ٢س (٢س +٥) (س^{٣}-٢)

+٣س^{٢}(٢س+٥) (س^{٢}+١)

مشتقة قسمة دالتين

(٦) المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين :

المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر (س) ≠ صفر

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د'(س) \times ر(س) - ر'(س) \times د(س)}{(ر(س))^٢}$

****

مثـــ٦ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = $\frac{٢س - ٥}{٣س + ٢}$

الحـــــل

$ص' = \frac{٢(٣س+٢) - ٣(٢س - ٥)}{(٣س+٢)^٢}$

$= \frac{٦س + ٤ - ٦س + ١٥}{(٣س + ٢)^٢} = \frac{١٩}{(٣س + ٢)^٢}$

****

مثـــ٧ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = $\frac{س^٢ + ٣}{س^٢ - ٢}$

الحـــــل

$ص' = \frac{٢س(س^٢ - ٢) - ٢س(س^٢+٣)}{(س^٢ - ٢)^٢}$

$= \frac{٢س^٣ - ٤س - ٢س^٣ - ٦س}{(س^٢ - ٢)^٢} = \frac{-١٠س}{(س^٢-٢)^٢}$

مثـــ٨ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $د(س) = \frac{س + ١}{س - ١}$

الحـــــــــل

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س - ١)\,١ - (س + ١)(١)}{(س - ١)^٢} = \frac{س - ١ - س - ١}{(س - ١)^٢} = \frac{-٢}{(س - ١)^٢}$$

****

مثـــ٩ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \frac{٢س}{٥س + ٣}$

الحـــــــــل

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢(٥س + ٣) - ٥ \times ٢س}{(٥س + ٣)^٢} = \frac{١٠س + ٦ - ١٠س}{(٥س + ٣)^٢} = \frac{٦}{(٥س + ٣)^٢}$$

****

مثـــ١٠ـــال : إذا كانت : ص = $\frac{٣س - ٤}{٢س + ٥}$ **أوجد :** $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــــــل

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣(٢س + ٥) - ٢(٣س - ٤)}{(٢س + ٥)^٢} = \frac{٢٣}{(٢س + ٥)^٢}$$

****

تذكر ما يلى :

* ميل المماس للمنحنى ص عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) الواقعة عليه هو :

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = س_١}$ = طا هـ حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ميل المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

* ميل أى مستقيم يوازيه = $\frac{-أ}{ب}$ * ميل أى مستقيم عمودى عليه = $\frac{ب}{أ}$

* ميل المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) يساوى $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

* معادلة المستقيم بمعلومية ميله واى نقطة واقعة عليه ($س_1$ ، $ص_1$) هى :

ميل المستقيم = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ أ، $(ص_2 - ص_1) = م\ (س_2 - س_1)$

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور السينات نضع : ص = ٠
* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور الصادات نضع : س = ٠
* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى $ص_1$ = د (س) مع المستقيم $ص_2$ = م س + حـ

* نضع : $ص_1 = ص_2$

****

مثـــال ١١ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (س – ٢) (س -٣)

عند النقطة (٣ ، ٦)

الحـــــــــــــل

ميل المماس م = ص/ = ١ (س -٣) + ١ (س – ٢)

= س ـ ٣ + س ـ ٢ = ٢س ـ ٥

عند النقطة (٣ ، ٦) ∴ م = ٢ × ٣ ـ ٥ = ١

****

مثـــال ١٢ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٣}{س + ١}$ عند النقطة (١ ، ١,٥)

الحـــــــــــــل

ميل المماس م = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س+١)×صفر ـ ٣×١}{(س+١)^{٢}}$ = $\frac{-٣}{(س+١)^{٢}}$

عند النقطة (١ ، ١,٥) م = $\frac{-٣}{(١+١)^{٢}}$ = $\frac{-٣}{٤}$

****

مثـــال ١٣ : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة

ص = $\frac{٤}{س+ ١}$ عند النقطة (-٣، -٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحـــــــــــــل

ظاهـ = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س+١)×صفر ـ ٤×١}{(س+١)^{٢}}$ = $\frac{-٤}{(س+١)^{٢}}$

عند النقطة (-٣، -٢) $\quad$ ظاهـ = $\frac{-٤}{(-٣+١)^٢}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ق (∠ هـ) = ١٣٥° = $\frac{٣\pi}{٤}$

****

مثـــال ١٤ : أوجد قيم س التى عندها المماس التى عندها المماس لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣}ـ ١٥س^٢+٣٥س+٥ يصنع زاوية ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحـــــــــل

∵ المماس يصنع زاوية ١٣٥° $\quad$ ∴ ص′ = ظا١٣٥° = -١

∴ ص′ = ٦ س^٢ – ٣٠س+ ٣٥ = -١ $\quad$ ∴ ٦س^٢ – ٣٠س+ ٣٦ = ٠ ÷ ٦

∴ س^٢ – ٥ س + ٦ = ٠ نحلل $\quad$ ∴ (س -٢)(س – ٣) = ٠

ومنها $\quad$ ∴ س = ٢ $\quad$ أ، $\quad$ س = ٣

****

تمـــــارين

١ – أوجد المشتقـة الأولـي للـدوال الآتيـة : ـ

١) ص = (س^٢ – ٥ س)(س^٣ + ١) $\quad$ عند س = ٠

٢) ص = (س^٢ + ١)(س^٢ + ٣س – ٣) $\quad$ عند س = ٢

٣) ص = س (س – ٢)(س + ٣) $\quad$ عند س = – ٣

٤) ص = $\frac{س – ١}{٣}$ $\quad$ عند س = ٢

٥) ص = $\frac{س – ١}{س + ٢}$ $\quad$ عند س = – ١

٢ – أوجد معدل تغير كلا مـن الـدوال الآتيـة عند قيم س المبينة أمام كلا منها :

١) د (س) = (س^٢ – ٣)(س + ٤) $\quad$ عند س = ٢

٢) د (س) = $\frac{س^٢ – ٣}{س +١}$ $\quad$ عند س = ٢

٣ ــ أوجد ميل المماس لمنحنيات الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كلا منها :

١) ص = (س^{٢} + س)(س^{٢} ــ ٣) عند النقطة (ــ ١ ، ٠)

٢) ص = (س^{٢} ــ ٦ س + ٣)(٢ س ــ ٣) عند النقطة (١ ، ٢)

٣) ص = (س ــ ٣) / (س + ١) عند النقطة (١ ، ١)

٤ ــ اوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :

١) ص = ـ١ـ س (س^{٢} ــ ٥ س + ١)(٢ س ــ ٣) عند نقطة الأصــل

٢) ص = (س + ٢) / (س ــ ٢) عند النقطة (٠ ، ــ ١)

٥ ــ اوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية والتي تحقق الشروط :

١) ص = (٢ س + ١)(س ــ ١)

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

٢) ص = س^{٣} ــ ٢ س + ١

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

٦ ــ أوجد معادلة المماس فيما يلي :

١) ص = (س + ١)(س^{٣} ــ ٢) عند النقطة : س = ١

٢) ص = ١٦ / (س + ١) عند النقطة : س = ٣

٧ ــ إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص= س^{٣} ــ ٣ س عند النقطتين (٠ ، ٣) ؛ (ــ ١ ، ٤) متوازيان

٨ ــ إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص = س^{٢} ــ س + ٣ عند النقطتين (٠، ٣) ؛ (١، ٣) متعامدين

٩ ــ إذا كانت : د (س) = س × ى (س) ،وكانت : ى (١) = ٣، ى$^{/}$(١) = ٢

فأوجد : د$^{/}$(١)

مشتقة دالة الدالة

إذا كانت : ص = [د (س)]^{ن} فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ن [د (س)]$^{ن-١}$ × د$'$ (س)

مشتقة (قوس)^{ه} = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

فمثلاً :

إذا كانت : ص = (٥ س + ١)^{٤}

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ (٥ س + ١)^{٣} × ٥ = ٢٠ (٥ س + ١)^{٣}

****

مثــ١ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = (٢س – ٣)^{٥}

الحـــــــل

ص$'$ = ٥ (٢س – ٣)^{٤} × ٢ = ١٠ (٢س – ٣)^{٤}

****

مثــ٢ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = (س^{٣} + ٥)^{٦}

الحـــــــل

$\frac{ءس}{ءص}$ = = ٦ (س^{٣} + ٥)^{٥} × ٣س^{٢} = ١٨س^{٢} (س^{٣} + ٥)^{٥}

****

ملحوظة :

إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{د (س)}}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢ \sqrt{\text{د (س)}}}$ × د$'$ (س)

فمثلاً :

إذا كانت : ص = $\sqrt{٣ \text{ س} + ١}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢ \sqrt{٣ \text{ س}+١}}$ × ٣ = $\frac{٣}{٢ \sqrt{٣\text{س}+١}}$

****

مثــ٣ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة: ص = $\sqrt[٣]{٥ \text{ س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$

الحـــــــل

∴ ص = (٥ س^{٢} ـ ٣ س+٢)$^{\frac{١}{٣}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٣}$(٥ س^{٢} ـ ٣ س+٢)$^{-\frac{٢}{٣}}$ × (١٠س ـ ٣) = $\frac{١٠ \text{ س} - ٣}{٣ \sqrt[٣]{(٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س}+٢)^{٢}}}$

مثـــ٤ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \frac{-٥}{(٣س^٢ - س)^٤}$

الحـــــــــل

$\because ص = -٥ (٣س^٢ - س)^{-٤}$

$\therefore ص' = -٥ \times -٤ (٣س^٢ - س)^{-٥} (٦س - ١)$

$\therefore ص' = \frac{٢٠ (٦س - ١)}{(٣س^٢ - س)^٥}$

****

مثـــ٥ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \sqrt{(٢س+٣)^٣}$ عندما $س = ٣$

الحـــــــــل

$\because ص = (٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore ص' = \frac{٣}{٢}(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ = ٣(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}} = ٣\sqrt{(٢س+٣)}$

عندما $س = ٣$ $\therefore ص' = ٣ \times \sqrt{٦ + ٣} = ٣\sqrt{٩} = ٣ \times ٣ = ٩$

****

مثـــ٦ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \sqrt[٤]{(س^٢ - ٣س + ١)^٥}$

الحـــــــــل

$\because ص = (س^٢ - ٣س + ١)^{\frac{٥}{٤}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{٤}(س^٢-٣س+١)^{\frac{١}{٤}} (٢س - ٣) = \frac{٥}{٤}(٢س - ٣) \sqrt[٤]{(س^٢-٣س+١)}$

****

نظرية :

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = د [ر (س)] تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

فمثلاً :

إذا كانت : ص = $\text{ع}^{٨}$ + ١ ، ع = ٣ س – ٤

فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = (٨\ \text{ع}^{٧}) \times (٣) = ٢٤\ (٣\ \text{س} - ٤)^{٧}$

نتيجة :

إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{\text{د}}{\text{دس}} (\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن ص}^{\text{ن}-١} \times \text{ص}/$

فمثلاً :

$\frac{\text{د}}{\text{دس}} (\text{ص}^{٤}) = ٤\ \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{د}}{\text{دس}} (\text{ص}^{٤} + \text{س}^{٥}) = ٤\ \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٥\ \text{س}^{٤}$

****

مثـــال٧ : إذا كانت ص = $\text{ع}^{٥}$ ، ع = ٢س + ١ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحـــــل

∵ $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٥\ \text{ع}^{٤}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٥\ \text{ع}^{٤} \times ٢ = ١٠\ \text{ع}^{٤} = ١٠\ (٢\text{س} + ١)^{٤}$

حل أخـــــر

∵ ص = $\text{ع}^{٥} = (٢\text{س} + ١)^{٥}$ ∴ ص/ = = ٥ $(٢\text{س}+١)^{٤}$ = ١٠ $(٢\text{س}+١)^{٤}$

****

مثـــال٨ : إذا كانت ص = $\text{ع}^{٦}$ + ٣ ، ع = $\text{س}^{٢}$ + ٥ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحـــــل

∵ ص = $\text{ع}^{٦} + ٣ = (\text{س}^{٢} + ٥)^{٦} + ٣$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\ (\text{س}^{٢} + ٥)^{٥} \times ٢\text{س} = ١٢\ \text{س}\ (\text{س}^{٢} + ٥)^{٥}$

مثـــ٩ـــال : إذا كانت ص = ع^{٥} + ع^{٣} ، ع = ٢س − ٧ أوجد دص/دس

الحـــــــــل

∵ ص = (٢س − ٧)^{٥} + (٢ س − ٧)^{٣}

∴ دص/دس = ٥ (٢س-٧)^{٤} × ٢ + ٣ (٢س-٧)^{٢} × ٢

∴ دص/دس = ١٠(٢س − ٧)^{٤} + ٦ (٢س − ٧)^{٢}

****

مثـــ١٠ـــال : إذا كانت ص = ٢ ع^{٥} + ١/ع^{٥} ، ع = ٣س + ١ أوجد دص/دس

الحـــــــــل

∵ ص = ع^{٥} + ع$^{-٥}$ = ٢ (٣س+١)^{٥} + (٣س+١)$^{-٥}$

∴ دص/دس = ١٠ (٣س+١)^{٤} × ٣ − ٥ (٣س+١)$^{-٦}$ × ٣

∴ دص/دس = ٣٠ (٣س+١)^{٤} − ١٥/(٣س+١)^{٦}

****

مثـــ١١ـــال : إذا كانت د (س) = (ع − ٥)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٧ أوجد : د/ (١)

الحـــــــــل

∵ د (س) = (س^{٢} + ٧ − ٥)^{٥} = (س^{٢} + ٢)^{٥}

∴ د/ (س) = ٥ (س^{٢} + ٢)^{٤} × ٢ س

∴ د/ (س) = ١٠ س (س^{٢} + ٢)^{٤} ∴ د/ (١) = ١٠ × ١ (١ + ٢)^{٤} = ٨١٠

****

مثـــ١٢ـــال : إذا كانت ص = ١/ع^{٤} ، ع = (س^{٣}+١) أوجد : دص/دس

الحـــــــــل

∵ ص = ع$^{-٤}$ = (س^{٣} + ١)$^{-٤}$

∴ دص/دس = − ٤ (س^{٣} +١)$^{-٥}$ × ٣س^{٢}

∴ دص/دس = − ١٢س^{٢} (س^{٣} +١)$^{-٥}$ = − ١٢س^{٢} / (س^{٣}+١)^{٥}

مثـــال ١٣ : إذا كانت ص = $\sqrt[3]{ع^{٧}}$ ، ع = س^{٢} + ٢س + ١ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــل

∵ ص = ع$^{\frac{٧}{٣}}$ = (س^{٢} + ٢س + ١)$^{\frac{٧}{٣}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٧}{٣}$(س^{٢} + ٢س + ١)$^{\frac{٤}{٣}}$ × (٢س + ٢)

= $\frac{٧ (٢س + ٢)}{٣ \times \sqrt[3]{(س^{٢}+٢س+١)^{٤}}}$

****

مثـــال ١٤ : إذا كانت ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = س^{٢} + ٥ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــل

∵ ص = $\frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} + ٥ - ١}$ = $\frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} + ٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢س(س^{٢}+٤) - ٢س(س^{٢}+٥)}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢س^{٣} + ٨س - ٢س^{٣} - ١٠س}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$ = $\frac{-٢س}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$

****

مثـــال ١٥ : إذا كانت ص = ع^{٢} + ع ، ع = ٢س^{٢}

إثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ - $\frac{ءع}{ءس}$ = ١٦س^{٣}

الحـــــل

∵ $\frac{ءع}{ءس}$ = ٤س

∵ ص = (٢س^{٢})^{٢} + ٢س^{٢} = ٤س^{٤} + ٢س^{٢} ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٦س^{٣} + ٤س

∴ الطرف الايمن = ١٦س^{٣} + ٤س - ٤ س = ١٦س^{٣} الطرف الايسر

تمـــــــــــارين

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) إذا كان ص = $(٢ - ٣\text{س})^{٥}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ...

(أ) $(٢ - ٣\text{س})^{٤}$ (ب) $٥(٢ - ٣\text{س})^{٤}$ (ج) $١٥(٢ - ٣\text{س})^{٤}$ (د) $٣\,(٢ - ٣\text{س})^{٤}$

(٢) ميل المماس للمنحنىالدالة ص = $(٢\text{س} - ٣)^{٥}$ عند س = ٢ يساوى ...

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣) ميل المماس للمنحنى ص = $\text{س}^{-١}$ عند س =١ يساوى ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ـ١ (د) غير معرف

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية

١ ـ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتي :-

١) ص = $\text{ع}^{٨}$ ؛ ع = $\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}$

٢) ص = $\text{ع}^{٦}$ ؛ ع = $٢\,\text{س}^{٢} - \text{س} + ١$

٣) ص = $\text{ع}^{٥} + \text{ع}^{٣}$ ؛ ع = $٣\text{س}^{٢} - ١$

٤) ص = $\text{ع}^{٢} + ١$ ؛ ع = $\text{س} - \frac{١}{\text{س}}$ عند س = ٢

٥) ص = $(\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٤)^{٦}$

٦) ص = $\frac{٣}{(\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س})^{٨}}$

٧) ص = $\sqrt{(\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س})^{٥}}$

٢ ـ أوجد كلاً من :

١) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٦})$ ٢) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ص}^{٦})$ ٣) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٣} + ٣\,\text{ص}^{٣})$

٣ ـ أجـب عما يـأتــي :-

١) إذا كانت ص = $\sqrt{\text{ع} + ٩}$ ؛ ع = $\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ١

٢) إذا كانت ص = $\sqrt{٢\,\text{ع}^{٣} + ٧}$ ؛ ع = $(\text{س} + ١)^{٢}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٠

(٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $(١ + \text{س})^{٤}\,(١ - \text{س})^{٤}$ والتى يكون عندها المماس موازياً محور السينات

(٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ عند النقطة (٣ ، ٤)

التكامـــــــل

تعريف :

إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : ت/ (س) = د (س) فإن :

ت (س) تسمى المشتقة العكسية للدالة د (س) أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د (س) و يرمز للدالة ت (س) بالرمز ∫ د (س) ء س

أى أن : ت (س) = ∫ د (س) ء س إذا و فقط إذا كان : ت/ (س) = د (س)

فمثلاً: إذا كانت : د (س) = س^{٢} فإن : د/ (س) = ٢ س

و بالتالى تكون الدالة س^{٢} هى مشتقة عكسية " دالة أصلية مقابلة " للدالة ٢ س

مثـــ١ـــال : أى أن : ∫ ٢ س ء س = س^{٢} + ث حيث : ث ثابت التكامل

نظرية :

$$∫ س^{ن} ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$ حيث : ن ≠ – ١ ، ث ثابت

مثـــ٢ـــال : أى أن : ∫ س^{٥} ءس = $\frac{س^{٦}}{٦}$ + ث

مثـــ٣ـــال : أى أن : ∫ س^{٣} ء س = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + ث

مثـــ٤ـــال : أى أن : ∫ س^{٢} ء س = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ث

مثـــ٥ـــال : أى أن : ∫ س ء س = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث

****

نتيجة.

$$∫ ا س^{ن} ء س = \frac{ا س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$ حيث : ن ≠ – ١ ، ا ، ث ثوابت

ملاحظة.

∫ ء س = س + ث ، ∫ ا ء س = ا س + ث

قاعدة:

$$\int [\text{د}_1(\text{س}) \pm \text{د}_2(\text{س}) \pm \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \text{د}_\text{ن}(\text{س})]\, \text{ء س}$$

$$= \int \text{د}_1(\text{س})\, \text{ء س} \pm \int \text{د}_2(\text{س})\, \text{ء س} \pm \ldots\ldots \pm \int \text{د}_\text{ن}(\text{س})\, \text{ء س}$$

مثـــال١: $\int (3\text{س}^2 + 4\text{س} - 5)\, \text{ء س} = \frac{3\text{س}^3}{3} + \frac{4\text{س}^2}{2} - 5\text{س} + \text{ث}$

$= \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 5\text{س} + \text{ث}$

مثـــال٢: $\int (\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^3})\, \text{ء س} = \int (\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{-3})\, \text{ء س}$

$= \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{ث} = \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3} - \frac{1}{2\text{س}^2} + \text{ث}$

مثـــال٣: $\int (\text{س} - 5)(\text{س} + 1)\, \text{ء س} = \int (\text{س}^2 - 4\text{س} - 5)\, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3 - 2\text{س}^2 - 5\text{س} + \text{ث}$

مثـــال٤: $\int \frac{\text{س}^3 - 4\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س}}\, \text{ء س} = \int (\text{س}^2 - 4\text{س} - 5)\, \text{ء س}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3 - 2\text{س}^2 - 5\text{س} + \text{ث}$

مثـــال٥: $\int \frac{\text{س}^3 - 1}{\text{س} - 1}\, \text{ء س} = \int \frac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1)}{\text{س} - 1}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{س}^2 + \text{س} + 1)\, \text{ء س} = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{س} + \text{ث}$

****

نظرية : إذا كان : أ ، ب ثابتين ، $\text{ن} \neq -1$ فإن :

$$\int (\text{أ س} + \text{ب})^\text{ن}\, \text{ء س} = \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن} + 1)} + \text{ث}$$ حيث ث ثابت

مثـــال١: $\int (2\text{س} + 3)^5\, \text{ء س} = \frac{(2\text{س} + 3)^5}{2 \times 6} + \text{ث}$

مثــ٢ــال: $\int \sqrt{2\text{س}-5}\ \text{ء س} = \int (2\text{س}-5)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء س}$

$$= \frac{(2\text{س}-5)^{\frac{3}{2}}}{2\times\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{1}{3}\sqrt{(2\text{س}-5)^{3}} + \text{ث}$$

مثــ٣ــال: $\int \text{س}^{10}\left(\frac{7}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}\ \text{ء س} = \int \left[\text{س}^{2}\left(\frac{7}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}\right)\right]^{5}\ \text{ء س}$

$$= \int (7\text{س}+1)^{5}\ \text{ء س} = \frac{1}{42}(7\text{س}+1)^{6} + \text{ث}$$

مثــ٤ــال: $\int (\text{س}+1)\sqrt{3\text{س}+5}\ \text{ء س}$ بالضرب فى $3 \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3}\int (3\text{س}+3)(3\text{س}+5)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{3}\int (3\text{س}+5-2)(3\text{س}+5)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء س}$$ بإضافة ± 5

$$= \frac{1}{3}\int (3\text{س}+5)^{\frac{3}{2}}\ \text{ء س} - \frac{2}{3}\int (3\text{س}+5)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{2}{45}(3\text{س}+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{27}(3\text{س}+5)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

****

تمـــــــارين

١ – أوجد :

(١) $\int 5\text{س}^{2}(2\text{س}-1)^{2}\ \text{ء س}$

(٢) $\int (\text{س}^{2}-1)^{2}(\text{س}^{2}+1)^{2}\ \text{ء س}$

(٣) $\int \frac{\text{س}^{3}+1}{\text{س}+1}\ \text{ء س}$ (٤) $\int (5-3\text{س})^{8}\ \text{ء س}$

(٥) $\int \sqrt{3\text{س}-1}\ \text{ء س}$ (٦) $\int \frac{3}{(5\text{س}+1)^{4}}\ \text{ء س}$

(٧) $\int \text{س}(\text{س}+1)^{5}\ \text{ء س}$ (٨) $\int (2\text{س}+1)\sqrt{\text{س}^{2}-1}\ \text{ء س}$



كيفية طباعة صفحات معينة من ملف معين



مثلا ازاى نطبع الصفحات من صفحة 4 الى صفحة 9

خطوة 1

خطوة 2
اختيار اسم الطابعة بتاعتك

خطوة 3
كتابة الصفحات المراد طباعتها
نكتب رقم 4 ثم نكتب الشرطة دي - ثم نكتب 9

خطوة 4
اختيار نوع الورق

خطوة 5
اختيار A4

خطوة 6